

**Titre:** Développement d'une méthodologie de spécification du tolérancement géométrique, associé au fonctionnement cinématique d'un système mécanique  
**Title:**

**Auteur:** Christine Tarquini  
**Author:**

**Date:** 1997

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Tarquini, C. (1997). Développement d'une méthodologie de spécification du tolérancement géométrique, associé au fonctionnement cinématique d'un système mécanique [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/9023/>  
**Citation:**

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/9023/>  
**PolyPublie URL:**

**Directeurs de  
recherche:**  
**Advisors:**

**Programme:** Unspecified  
**Program:**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODOLOGIE DE SPÉCIFICATION DU  
TOLÉRANCEMENT GÉOMÉTRIQUE, ASSOCIÉ AU FONCTIONNEMENT  
CINÉMATIQUE D'UN SYSTÈME MÉCANIQUE

CHRISTINE TARQUINI  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

AVRIL 1997



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file - Votre référence*

*Our file - Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26520-X

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODOLOGIE DE SPÉCIFICATION DU  
TOLÉRANCEMENT GÉOMÉTRIQUE, ASSOCIÉ AU FONCTIONNEMENT  
CINÉMATIQUE D'UN SYSTÈME MÉCANIQUE

présenté par: TARQUINI Christine

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès en sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BOUKAS El-Kébir, Ph.D., président

M. BALAZENSKI Marek, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. DUPINET Éric, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. CIOBANU Bogdan, membre

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements au professeur Éric Dupinet, mon directeur technique de recherche, qui a rendu possible la réalisation de ce projet, grâce notamment à son support financier. De plus, l'intérêt manifeste qu'il a de chaque instant démontré pour ce travail, et qui s'est traduit par de judicieux conseils, a façonné l'issue de ce mémoire.

## RÉSUMÉ

Bien que les mécanismes isostatiques ne posent pas de problème d'assemblage, ils sont généralement plus bruyants (présence de jeux) et aussi moins rigides que les mécanismes hyperstatiques. L'ingénieur concepteur est donc amené, dans plusieurs cas, à opter pour ce second type de mécanisme. Il doit, conséquemment, remédier aux problèmes créés par les hyperstatismes par la mise en place d'un tolérancement géométrique approprié.

Le projet présenté dans ce mémoire avait pour objectif de développer une méthodologie de spécification du tolérancement géométrique, associé au fonctionnement cinématique d'un système mécanique. Ceci excluait donc les contraintes fonctionnelles de fermeture de chaîne impliquant la présence de jeux ou ajustements, les contraintes fonctionnelles d'interférence entre pièces en mouvement relatif et les contraintes fonctionnelles de portée pour le maintien de la qualité des liaisons.

L'élaboration de la démarche repose sur certains concepts de la théorie des mécanismes et utilise, comme outil mathématique, les torseurs. Un système mécanique est défini comme un agencement ordonné de pièces reliées par des liaisons. L'hypothèse de base de l'analyse consiste à modéliser les pièces par des solides parfaits, géométriquement bien définis et indéformables. Pour leur part, les liaisons sont caractérisées par des surfaces de liaisons géométriquement parfaites, comme étant indéformables sous charge, ayant des ajustements sans jeu et des mouvements relatifs sans frottement.

La méthode elle-même est divisée en trois parties, soit la modélisation du mécanisme, l'analyse hyperstatique et la spécification du tolérancement géométrique. La modélisation du système mécanique a pour objet de donner une image simplifiée et symbolique du mécanisme, afin d'en faciliter l'étude. Elle consiste, dans un premier temps, à identifier toutes les pièces intervenant dans la construction du système mécanique, et à comprendre

le fonctionnement. Ensuite, il s'agit de regrouper les éléments en contact n'entretenant aucun mouvement relatif, puis de construire le graphe de structure. Le modèle de liaison cinématique, correspondant aux liaisons reliant chaque groupe de ce graphe est alors déterminé, et le schéma cinématique réalisé. Finalement, les torseurs statiques correspondant à chacune de ces liaisons sont identifiés dans un repère local propre à la liaison.

La deuxième étape de la méthodologie de spécification du tolérancement géométrique, l'analyse hyperstatique, consiste tout d'abord à vérifier si le système étudié est isostatique ou hyperstatique. Advenant cette seconde éventualité, il s'agit d'établir les équations d'équilibre et d'identifier, à partir de celles-ci, les sources d'hyperstatismes. Leurs répercussions sur chacun des groupes sont alors analysées.

La spécification du tolérancement géométrique sur les composants est ensuite effectuée. Suivant les résultats obtenus lors de l'étape précédente, il s'agit d'abord de poser les conditions fonctionnelles imposées par l'existence des sources d'hyperstatisme. Le tolérancement géométrique requis pour chacune des pièces du système mécanique est ensuite déduit.

L'application de la méthodologie développée sur trois exemples de complexité croissante, soit le moteur à explosion 2 temps, la pompe à corps déformable et le variateur de vitesse, a permis la spécification d'un tolérancement géométrique tout à fait acceptable dans chacun des cas. Toutefois, bien que la méthode proposée marque un pas en avant dans le domaine, en s'inscrivant comme l'une des premières démarches logiques et rationnelles permettant le tolérancement géométrique d'un système mécanique, il n'en demeure pas moins qu'elle présente, encore à ce jour, certaines limites. Tout d'abord, la première étape de la méthode, la modélisation du mécanisme, est décisive en ce qui a trait aux résultats qui seront obtenus. Une compréhension approfondie du fonctionnement du

Le système étudié, de même qu'une connaissance des caractéristiques techniques des composants technologiques impliqués, sont indispensables à la formulation des hypothèses de départ, soit ici l'association d'un modèle de liaison cinématique à chacune des liaisons mécaniques présentes dans le mécanisme. L'expérience de l'ingénieur concepteur est donc incontestablement mise à contribution.

Par ailleurs, la méthodologie développée permet essentiellement d'être informé des contrôles de position et d'orientation requis pour chacune des pièces du système mécanique. Néanmoins, le problème du tolérancement géométrique proprement dit demeure entier. En ce sens, ce sont les contraintes relatives à la fabrication et à l'inspection des pièces qui dicteront principalement le tolérancement géométrique à adopter parmi les diverses possibilités offertes par la norme. Le débutant sera donc amené à faire preuve de vigilance lors de cette dernière étape de la démarche, soit la spécification du tolérancement géométrique.



## ABSTRACT

Even if isostatic mechanisms are easier to assemble, they generally exhibit two drawbacks: noise and lack of rigidity as compared to hyperstatic mechanisms. The design engineer is then often brought to choose this second type of mechanism. He must therefore solve the problems of hyperstaticisms, by using the appropriate geometric tolerancing.

The main objective of the project as explained in this document was to develop a geometric tolerancing specification method, associated to the kinematics of a mechanical system. Functioning conditions as chain closing where gaps or adjustments are present, interference between parts in relative movement and bearing support are excluded from this approach.

The method is based on mechanisms theory fundamentals and uses torsors as a mathematical tool. A mechanical system is defined as an ordered arrangement of parts, joined by links. Parts are supposed to be well defined geometrically perfect solids and not deformable. The links are supposed to be geometrically perfect, not deformable under charge, without gap adjustments and friction-free.

The method itself is divided in three steps, being the modelisation of the mechanism, the hyperstatic analysis and the specification of geometric tolerancing. The goal of the modeling phase is to give a simplified and symbolic image of the mechanism, in order to ease its study. The method consists in the identification of all the parts used in the construction of the mechanism, and then to understand how it works. After that, the linked elements that do not have any relative movement must be grouped, then finally the structural graph must be constructed. The kinematic joints, corresponding to each links between each group of the structural graph are then determined, and kinematic diagram is

drawn. Finally, the static torsor corresponding to each of the chosen are identified in an appropriate reference axis.

The second step of the method is the hyperstatic analysis. It consists in verifying if the system under study is isostatic or hyperstatic. If the system is hyperstatic, the equilibrium equations must be established, and the hyperstatism sources must be identified from these equations. The effect on each group is then analyzed.

The specification of the geometric tolerancing of each component is then started. Based on the preceding results, the functioning conditions imposed by the existence of hyperstatism sources have to be figure out.

The application of this method on three examples of increasing complexity, that is a two-strokes explosion motor, a peristaltic pump, and a mechanical speed variator, allowed the specification of a rather acceptable geometric tolerancing in each case. However, even if the proposed method marks a step forward in this field, because it is one of the first rational and logical system to obtain the geometric tolerancing of a mechanical system, it also has some limitations for now. First of all, the first step of the method, the modeling of the mechanism, is decisive in regard of results obtained. A very good understanding of the way the studied system works, as well as the knowledge of the technical characteristics of the technological components used in the mechanism are essential for the kinematic joints selection process. The experience of the design engineer is then incontestably used.

The developed method is used to obtain information about the position and orientation controls required for each component of a mechanical system. However, the geometric tolerancing problem remain complete because manufacturing and inspection constraints will be part of the proper geometric tolerance selection among the various possibilities offered by the norm. The beginner will then have to be cautious during this step of the method.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	iv
RÉSUMÉ .....	v
ABSTRACT .....	viii
TABLES DES MATIÈRES .....	x
LISTE DES TABLEAUX .....	xiii
LISTE DES FIGURES .....	xiv
LISTE DES ANNEXES .....	xvi
CHAPITRE I - INTRODUCTION .....	1
1.1 Problématique .....	1
1.2 Objectif .....	7
CHAPITRE II - REVUE DE LA LITTÉRATURE ET THÉORIE .....	8
2.1 Théorie des mécanismes .....	8
2.1.1 Définition d'un mécanisme .....	8
2.1.2 Modèles technologiques possibles d'un mécanisme .....	9
2.1.3 Représentations schématiques d'un mécanisme .....	9
2.1.3.1 Graphe des liaisons .....	10
2.1.3.2 Schéma cinématique .....	11
2.1.4 Les torseurs .....	12
2.1.4.1 Définition d'un torseur .....	12
2.1.4.2 Opérations sur les torseurs .....	13

2.1.4.3 Torseurs statique et cinématique .....	14
2.1.4.4 Torseurs associés aux liaisons parfaites .....	15
2.1.4.5 Dualité entre torseurs statique et cinématique dans le cas des liaisons parfaites .....	17
2.1.5 Règles de composition des liaisons .....	17
2.1.5.1 Liaisons en parallèle .....	18
2.1.5.2 Liaisons en série .....	19
2.1.6 Étude statique d'un mécanisme .....	20
2.1.7 Étude cinématique d'un mécanisme .....	20
2.1.8 Étude du degré d'hyperstatisme .....	21
2.2 Spécification du tolérancement géométrique .....	21
 CHAPITRE III - MÉTHODOLOGIE DE SPÉCIFICATION DU TOLÉRANCEMENT GÉOMÉTRIQUE .....	25
3.1 Modélisation du mécanisme .....	25
3.2 Analyse hyperstatique .....	29
3.2.1 Étude du degré d'hyperstatisme .....	29
3.2.2 Étude statique .....	31
3.2.2.1 Phénomènes de frottement .....	35
3.2.3 Identification des sources d'hyperstatisme .....	37
3.3 Spécification du tolérancement géométrique .....	38
3.3.1 Proposition des conditions fonctionnelles de position et d'orientation, permettant de contrôler les hyperstatismes .....	39
3.3.2 Proposition d'un tolérancement géométrique pour chacune des pièces .....	40
3.4 Exemples .....	40
3.4.1 Exemple: Moteur à explosion 2 temps .....	40
3.4.2 Exemple 2: Pompe à corps déformable .....	62

<b>CHAPITRE IV - DÉTERMINATION DU MODÈLE DE LIAISON .....</b>	<b>86</b>
4.1 Liaison réalisée au moyen de composants technologiques .....	86
4.2 Liaison réalisée par contact entre deux pièces .....	94
<b>CHAPITRE V - VARIATEUR DE VITESSE .....</b>	<b>95</b>
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>124</b>
6.1 Conclusions relatives à l'application de la méthode .....	124
6.2 Limites et contraintes de la méthode développée .....	125
6.3 Perspectives d'avenir .....	126
<b>RÉFÉRENCES .....</b>	<b>127</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>130</b>

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1: Liaisons mécaniques élémentaires .....	11
Tableau 2.2: Torseurs associés aux liaisons mécaniques parfaites .....	15
Tableau 2.3: Torseurs mécaniques caractérisés par rapport aux éléments géométriques de la liaison .....	22
Tableau 3.1: Paramètres de position relative en translation .....	33

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: a) Arbre monté sur deux roulement; b) Diagramme du corps libre .....	1
Figure 1.2: a) Arbre monté sur trois roulements; b) Diagramme du corps libre .....	2
Figure 1.3: Roulement désalignés .....	5
Figure 2.1: Graphe d'un mécanisme .....	10
Figure 2.2: Liaisons en parallèle .....	18
Figure 2.3: Liaisons en série .....	19
Figure 3.1: a) Liaisons en série quelconques; b) Liaisons en série regroupant les pièces en liaison encastrement .....	27
Figure 3.2: Construction des repères groupes .....	32
Figure 3.3: Phénomènes de frottement .....	36
Figure 3.4: Dessin d'ensemble d'un moteur à explosion 2 temps .....	41
Figure 3.5: Graphe du moteur .....	44
Figure 3.6: Schéma cinématique du moteur à explosion 2 temps .....	46
Figure 3.7: Conditions fonctionnelles relatives au moteur .....	57
Figure 3.8: Tolérancement du groupe bâti [0] .....	59
Figure 3.9: Tolérancement des pièces du groupe piston [1] .....	60
Figure 3.10: Tolérancement des pièces du groupe bielle [2] .....	61
Figure 3.11: Tolérancement des pièces du groupe vilebrequin [3] .....	61
Figure 3.12: Dessin d'ensemble d'une pompe à corps déformable .....	63
Figure 3.13: Graphe des liaisons de la pompe .....	66
Figure 3.14: Schéma cinématique de la pompe .....	68
Figure 3.15: Conditions fonctionnelles relatives à la pompe .....	82
Figure 3.16: Tolérancement du groupe boîtier [0] .....	83
Figure 3.17: Tolérancement des pièces du groupe arbre d'entrée [1] .....	85
Figure 3.18: Tolérancement des galets.....	85

Figure 4.1: a) Représentation de la liaison entre l'arbre d'entrée et un des galets	
b) Graphe des liaisons .....	87
Figure 4.2: Graphe des liaisons détaillé entre l'arbre d'entrée et le galet.....	88
Figure 5.1: Dessin d'ensemble du variateur de vitesse .....	96
Figure 5.2: Graphe des liaisons de la partie opérative du variateur de vitesse .....	99
Figure 5.3: Schéma cinématique du variateur de vitesse .....	101
Figure 5.4: Conditions fonctionnelles relatives au groupe arbre d'entrée [1] .....	114
Figure 5.5: Conditions fonctionnelles relatives au groupe arbre de sortie [3] .....	116
Figure 5.6: Conditions fonctionnelles entre l'arbre d'entrée [1] et le boîtier [0], relatives au groupe cône de transmission [2] .....	118
Figure 5.7: Conditions fonctionnelles entre l'arbre d'entrée [1] et l'arbre de sortie [3], relatives au groupe cône de transmission [2] .....	119
Figure 5.8: Conditions fonctionnelles entre l'arbre d'entrée [1] et l'arbre de sortie [3], relatives au groupe boîtier [0] .....	120
Figure 5.9: Conditions fonctionnelles entre l'arbre d'entrée [1] et le cône de transmission [2], relatives au groupe boîtier [0] .....	120
Figure 5.10: Tolérancement des pièces du groupe boîtier [0], en relation avec les conditions fonctionnelles impliquant les groupes [1] et [3] .....	121
Figure 5.11: Tolérancement des pièces du groupe boîtier [0], en relation avec les conditions fonctionnelles impliquant les groupes [1] et [2] .....	122
Figure 5.12: Tolérancement de l'arbre d'entrée .....	122
Figure 5.13: Tolérancement du cône de transmission [2] .....	123
Figure 5.14: Tolérancement des pièces appartenant au groupe arbre de sortie [3] .....	123



**LISTE DES ANNEXES**

Annexe I: Fonctions de singularités .....	130
Annexe II: Tolérancement d'un SATT .....	132

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

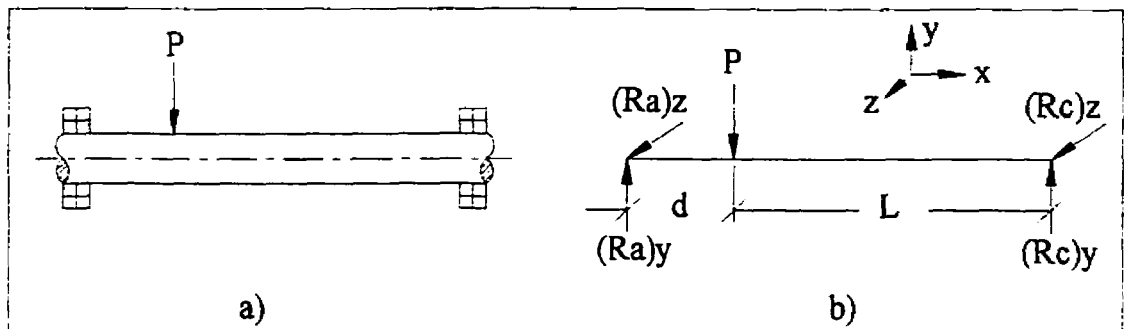
Cette introduction présente la problématique générale de conception d'un mécanisme et, les buts poursuivis lors du présent travail de recherche.

#### 1.1 Problématique

Un système mécanique est un ensemble de pièces reliées par des liaisons. Pour chaque liaison il existe un groupe d'inconnues représentant les efforts transmissibles par la liaison. Dans la mesure où les équations d'équilibre sont suffisantes pour déterminer toutes les inconnues de liaisons présentes à l'intérieur du mécanisme, on dira que le système mécanique est isostatique. Autrement dit, toutes les réactions sont nécessaires au maintien du système ainsi qu'à sa stabilité. Dans le cas contraire, on dira qu'il s'agit d'un mécanisme hyperstatique. L'exemple 1.1 illustre comment déterminer les efforts transmissibles dans le cas d'un mécanisme isostatique.

##### Exemple 1.1: Calcul des efforts transmissibles dans le cas d'un mécanisme isostatique

La figure 1.1 a) montre un arbre de renvoi supporté à ses deux extrémités par des roulements à billes, et sur lequel s'exerce une charge  $P$ .



**Figure 1.1:** a) Arbre monté sur deux roulements; b) Diagramme du corps libre (DCL)

### Solution

En se basant sur le DCL du système, il est possible d'écrire les équations d'équilibre suivantes:

$$(\sum F)y = 0 \quad \Rightarrow (R_a)y - P + (R_c)y = 0 \quad (1.1)$$

$$(\sum M_A)z = 0 \quad \Rightarrow -P \times d + (R_c)y \times (L + d) = 0 \quad (1.2)$$

Comme il n'y a pas de charge dans le plan xz, les réactions dans ce plan sont nulles. En supposant une charge  $P = 16 \text{ kN}$ ,  $d = 1 \text{ m}$  et  $L = 3 \text{ m}$ , on obtient:  $(R_a)y = 12 \text{ kN}$  et  $(R_c)y = 4 \text{ kN}$ .

Pour un mécanisme hyperstatique, la détermination des efforts transmissibles requiert l'introduction d'équations supplémentaires. Ce sont les relations de contrainte - déformation et de compatibilité géométrique, vues en résistance des matériaux, qui sont généralement utilisées. L'exemple 1.2 montre comment se calcule les réactions aux appuis dans ce dernier cas.

### Exemple 1.2: Calcul des efforts transmissibles dans le cas d'un mécanisme hyperstatique

À supposer que l'on désire augmenter la rigidité (diminuer la déformation ou flèche maximale) de l'arbre de renvoi du mécanisme de l'exemple précédent. Une façon d'y arriver consiste à ajouter un troisième roulement à mi-chemin entre les deux autres. Le système résultant et son DCL sont donnés à la figure 1.2.

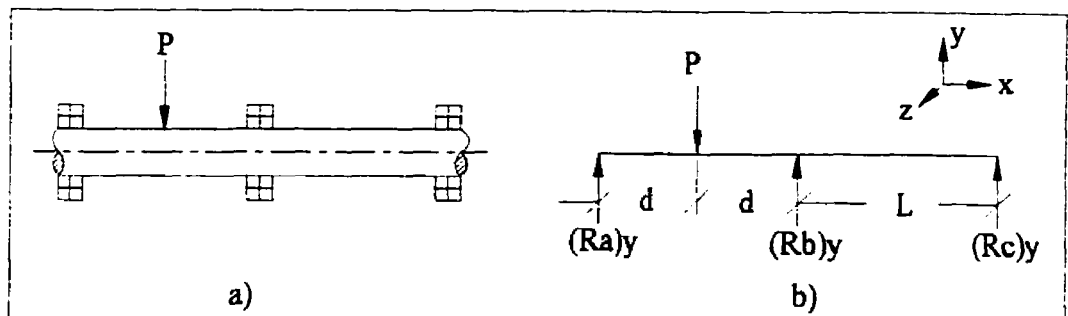


Figure 1.2: a) Arbre monté sur trois roulements; b) DCL

### Solution

#### 1. Conditions d'équilibre

$$(\sum F)_y = 0 \Rightarrow (R_a)_y - P + (R_b)_y + (R_c)_y = 0 \quad (1.3)$$

$$(\sum M_A)_z = 0 \Rightarrow -P \times d + (R_b)_y \times (2d) + (R_c)_y \times (L + 2d) = 0 \quad (1.4)$$

La charge P étant appliquée dans le plan xy, les réactions dans les autres plans sont nulles.

#### 2. Conditions de compatibilité géométrique

La méthode des fonctions de singularités est ici utilisée pour obtenir l'expression de la flèche de l'arbre en fonction de x (voir détail annexe I, page 130):

$$EIv(x) = \frac{(R_a)_y}{6} \langle x \rangle^3 - \frac{P}{6} \langle x - d \rangle^3 + \frac{(R_b)_y}{6} \langle x - d - d \rangle^3 + \dots + C_1 x + C_2 \quad (1.5)$$

À supposer que  $P = 16 \text{ kN}$ ,  $d = 1 \text{ m}$  et  $L = 2 \text{ m}$ , les équations de compatibilité géométrique ont pour résultats:

$$\text{lorsque } x = 0, \quad v = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (1.6)$$

$$\text{lorsque } x = 2, \quad v = 0 \Rightarrow \frac{(R_a)_y \times 4}{3} - \frac{8 \text{ kN}}{3} + C_1 \times 2 = 0 \quad (1.7)$$

$$\text{lorsque } x = 4, \quad v = 0 \Rightarrow \frac{(R_a)_y \times 32}{3} - 72 \text{ kN} + \frac{(R_b)_y \times 4}{3} + C_1 \times 4 = 0 \quad (1.8)$$

rem: Les défauts d'alignement s'introduiraient à  $v = 0$  pour  $x=2$  et  $x=4$

#### 3. Calcul des réactions

Les équations (1.3), (1.4), (1.7) et (1.8) constituant un système de quatre équations à quatre inconnues ( $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$  et  $C_1$ ), le problème est résolu. Les efforts transmissibles sont donc:

$$(R_a)_y = 6.5 \text{ kN}, (R_b)_y = 11 \text{ kN} \text{ et } (R_c)_y = -1.5 \text{ kN} \text{ et la constante } C_1 = -3 \text{ kN}.$$

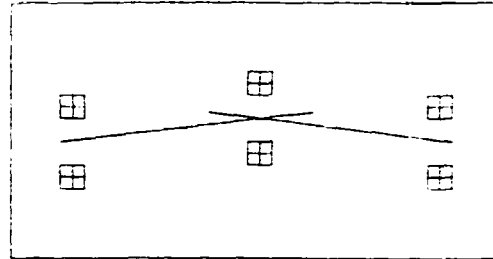
Connaissant les efforts transmissibles aux liaisons, il est donc possible de déduire les contraintes résultantes et ainsi vérifier la résistance des pièces constituant le système

mécanique. Les déformations peuvent aussi être évaluées et comparées aux déformations admissibles, c'est-à-dire celles qui permettent un fonctionnement adéquat du mécanisme. Il faut cependant remarquer que les calculs de résistance des matériaux présupposent un positionnement idéal des composants utilisés pour réaliser les liaisons mécaniques, soit un alignement parfait des roulements à billes dans les exemples antérieurs. Or, les systèmes réels ne présentent pas naturellement cette caractéristique. Il est donc nécessaire, dans un premier temps, d'évaluer dans quelle mesure les écarts de position entre les composants réalisant les liaisons mécaniques sont acceptables et, si ce n'est le cas, trouver un moyen d'y remédier. L'écart sera jugé acceptable si l'assemblage du mécanisme peut se faire sans engendrer de déformations nuisibles au fonctionnement du mécanisme et/ou introduire de contraintes supplémentaires (précontraintes) menant à la rupture des pièces ou à une augmentation des sollicitations en fatigue (voir remarque page précédente).

Dans le cas des mécanismes isostatiques, les écarts de position ou d'orientation entre les composants, utilisés pour la réalisation technologique des liaisons mécaniques, sont repris par les possibilités de mouvements cinématiquement compatibles avec les liaisons. Et ce, dans les limites des caractéristiques techniques (butée, déflexion, rotulage) autorisées par les composants. Il faudra toujours vérifier la compatibilité des déflexions, rotulages et jeux internes requis pour l'assemblage des pièces, avec les caractéristiques techniques tolérées par les composants utilisés pour la réalisation des liaisons.

En ce qui concerne l'assemblage des systèmes mécaniques hyperstatiques, les caractéristiques techniques présentent peu d'intérêt. En effet, considérons le mécanisme de l'exemple 1.2 en tenant compte d'une erreur de position possible du second roulement telle qu'illustrée à la figure 1.3. Il se conçoit facilement que le roulement du centre ne peut avoir un rotulage à gauche et à droite au même instant. De plus, si ce roulement n'a pas un jeu interne radial suffisant, il ne peut y avoir assemblage sans engendrer une précontrainte sur l'arbre. Ainsi, le fait d'avoir des inconnues hyperstatiques génère des

situations telles qu'il n'est pas suffisant de compter sur les caractéristiques des composants pour assurer l'assemblage. Il est par conséquent nécessaire d'avoir recours à d'autres solutions, lesquelles seront évoquées dans les paragraphes suivants.



**Figure 1.3 : Roulements désalignés**

Une façon un peu détournée de régler le problème consiste à rechercher une solution isostatique cinématiquement équivalente. Cette approche nécessite la reconception du mécanisme afin d'y incorporer des liaisons supplémentaires et des jeux. Il faut cependant veiller à éliminer les mouvements cinématiquement compatibles qui n'influencent pas les mouvements principaux et se rappeler que la présence de jeux dans les liaisons mécaniques crée des mobilités parasites qui nuisent à la précision du système et peuvent engendrer des bruits ou des vibrations.

L'autre solution pour régler une situation hyperstatique consiste à contrôler les écarts de position et/ou d'orientation entre les composants réalisant les liaisons mécaniques, en les maintenant à des niveaux acceptables. Ce contrôle est réalisé au moyen du tolérancement géométrique, dont les principes de la symbolisation et de l'indication sur les dessins techniques, de même que les définitions nécessaires, se trouvent dans la norme ANSI/ASME Y14.5M: 1994 (ISO 1101: 1983).

Lorsque le mécanisme le permet, il est possible d'imposer un tolérancement géométrique plus large et d'obliger certains composants du système mécanique à se déformer, de façon à pouvoir assembler le tout. Les déformations limites sont alors tributaires de la valeur

des contrôles imposés. Il importe, dans ce cas, de vérifier que les contraintes supplémentaires introduites dans les pièces soient suffisamment faibles pour ne pas en provoquer le bris et que les déformations engendrées ne sont pas néfastes à l'aptitude des pièces à l'emploi.

Advenant le cas où aucune contrainte ni déformation ne peuvent être acceptées par le système, il est alors nécessaire d'imposer un tolérancement géométrique plus serré, permettant l'assemblage direct des pièces (sans déformation).

Il est également envisageable d'adjoindre un dispositif mécanique de réglage au système. Par exemple, le deuxième roulement du système hyperstatique peut être monté sur un ressort de façon telle, qu'il sera possible de le positionner par rapport aux deux autres. Cette solution, quoique efficace, entraîne des complications technologiques qu'il faut savoir quantifier afin de ne pas engendrer de coûts prohibitifs.

Bien que les mécanismes isostatiques ne posent pas de problème d'assemblage, ils sont plus bruyants (présence de jeux) et aussi moins rigides que les mécanismes hyperstatiques. L'ingénieur concepteur sera donc amené, dans plusieurs cas, à opter pour ce second type de mécanisme et devra, conséquemment, remédier aux problèmes créés par les hyperstatismes de la façon exposée précédemment, soit par:

- détermination des inconnues hyperstatiques par calculs de structure;
- mise en place d'un tolérancement géométrique approprié permettant de limiter les défauts géométriques et par le fait même, le niveau de contraintes supplémentaires qu'imposeraient les hyperstatismes;
- déformation possible des pièces;
- adjonction éventuelle de dispositifs mécaniques de réglage.

Comme il est possible de le constater, le tolérancement géométrique joue un rôle fondamental dans le maintien de l'intégrité du mécanisme à l'étude. Or, la pratique actuelle dans l'entreprise relative à la spécification du tolérancement géométrique, associé au fonctionnement cinématique d'un mécanisme, est entièrement basé sur l'expérience. L'analyse fonctionnelle, telle qu'enseignée dans les cours de baccalauréat en ingénierie, permet essentiellement de déterminer les tolérances dimensionnelles des composants d'une chaîne de cotes unidirectionnelle, à partir des variations permises du jeu fonctionnel à respecter: fermeture de chaîne, interférence entre pièces, maintien de la qualité de la liaison. Aucune référence n'est donnée en ce qui a trait aux conditions fonctionnelles d'orientation des axes de liaisons à poser en raison des hyperstatismes, ni même de la mise en position relative d'une pièce par rapport à l'autre. L'importance d'une spécification judicieuse du tolérancement géométrique n'est pourtant pas à prouver. Il suffit de penser aux coûts exorbitants de la phase de prototypage, souvent longue, car les conditions fonctionnelles géométriques sont découvertes au cours de cette étape.

## 1.2 Objectif

Dans un souci d'intégration de toutes les phases du cycle de production, le présent travail a pour objectif de développer une démarche rationnelle de spécification du tolérancement géométrique, associé au fonctionnement cinématique d'un système mécanique. Le prochain chapitre, en plus d'exposer les principales notions de théorie indispensables à la compréhension de la méthode, fait un survol de l'état de l'art dans ce domaine. La méthode elle-même est présentée au chapitre III, tandis qu'un supplément concernant la détermination des modèles de liaisons cinématiques est donné au chapitre IV. La méthodologie développée est validée au chapitre V sur un problème de type industriel, qui est suivi, au chapitre VI, d'une conclusion.



## **CHAPITRE II**

### **REVUE DE LA LITTÉRATURE ET THÉORIE**

Le présent chapitre est divisé en deux parties. La première reprend les principales notions de la théorie des mécanismes. La seconde discute des différentes approches relatives à la spécification du tolérancement géométrique.

#### **2.1 Théorie des mécanismes**

Parmi les précurseurs de la théorie des mécanismes se retrouvent Bricard (1927), Koenigs (1905) et Voinea et Artanasiu (1962). Les auteurs des principaux textes sur lesquels repose la théorie exposée dans cette section (Agati et al., 1988; Aublin et al., 1992; Le Borzec et Lotterie, 1975; Spenlé et Gourhant, 1993) s'en sont d'ailleurs grandement inspirés. Après avoir donné une brève définition de ce qu'est un mécanisme, les différents modèles permettant d'appréhender cette réalité plutôt complexe seront exposés. Par la suite, les représentations schématiques, utilisées pour faciliter l'étude des mouvements et des efforts transmissibles, seront passées en revue. Subséquemment, une introduction aux torseurs, outil mathématique permettant de réaliser ces études, sera effectuée. Finalement, les principes de base des analyses statique et cinématique et de l'étude du degré d'hyperstatisme seront présentés.

##### **2.1.1 Définition d'un mécanisme**

Un mécanisme est un agencement ordonné de pièces reliées par des liaisons et capable de transformer l'énergie mécanique. Il possède au moins une entrée, pour recevoir les informations provenant du milieu extérieur, et au moins une sortie lui permettant de retourner ces informations une fois traitées.

### 2.1.2 Modèles technologiques possibles d'un mécanisme

Les modèles technologiques sont des abstractions, issues du réel, obtenues par élimination des imperfections et réduction de la complexité des phénomènes physiques. Les modèles technologiques permettent un traitement par les mathématiques d'un système mécanique et ce, dans le but de chiffrer des résultats et d'établir des lois. Un mécanisme ayant été défini comme un ensemble organisé de pièces reliées par des liaisons, il s'agit donc d'associer un modèle à chacune de ces composantes. Les principaux modèles existants sont les suivants:

#### Modèles de pièces:

- rigides
- déformables
  - déformations surfaciques
  - déformations volumiques

#### Modèles de liaisons:

- jeu (• avec; • sans)
- dissipation d'énergie (• avec; • sans)
- déformable (• oui; • non)  
(déformations surfaciques)

Les déformations volumiques affectent la totalité du volume de la pièce tandis que les déformations surfaciques sont locales au contact de deux surfaces (théorie de Hertz). Parmi les différentes combinaisons possibles, la plus fréquemment employée, lors des études d'avant projet, est celle qui modélise les pièces par des solides parfaits, géométriquement bien définis et indéformables. Pour leur part, les liaisons sont caractérisées par des surfaces de liaisons géométriquement parfaites, comme étant indéformables sous charge, ayant des ajustements sans jeu et des mouvements relatifs sans frottement. Les résultats mis en place lors de ce travail seront valables en regard de ces mêmes hypothèses, soit celles d'un système mécanique parfait.

### 2.1.3 Représentations schématiques d'un mécanisme

Il existe deux représentations schématiques généralement utilisées dans l'étude d'un mécanisme: le graphe des liaisons ou graphe de structure et le schéma cinématique.

### 2.1.3.1 Graphe des liaisons

Dans le graphe des liaisons d'un mécanisme, les pièces sont représentées par des cercles, et les liaisons par des arcs joignant ces cercles. Toutes les pièces sont numérotées avec des nombres consécutifs (0, 1, 2, ..., nombre de pièces). La figure 2.1 est un exemple de graphe comportant 5 pièces (5 cercles ou sommets) et 7 liaisons (7 arcs).

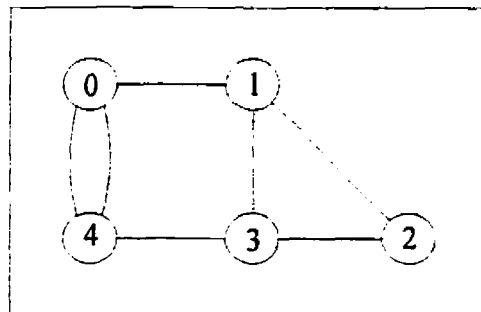


Figure 2.1: Graphe d'un mécanisme

#### *Propriétés d'un graphe des liaisons*

- 1) Le graphe des liaisons associé à un mécanisme est connexe (d'un seul tenant) sinon, il représenterait plusieurs systèmes, qu'il serait possible d'étudier séparément.
- 2) Le graphe des liaisons n'a généralement pas d'extrémités arborescentes, c'est-à-dire des sommets ou n'aboutit qu'un seul arc, les différentes pièces d'un mécanisme ayant, sauf cas spéciaux (robotique), au moins deux liaisons.

#### *Définitions se rapportant au graphe des liaisons*

*cycle*: Aublin et al. (1992) définissent un cycle comme étant «un chemin fermé extrait d'un graphe tel qu'en le parcourant on ne rencontre pas deux fois le même sommet».

*cycle indépendant*: Les cycles indépendants sont les cycles à partir desquels tous les autres cycles d'un graphe peuvent être obtenus, par addition et/ou soustraction. Il sera alors question d'une base de cycles indépendants.

**nombre cyclomatique:** Le nombre (nb) cyclomatique est le nombre de cycles indépendants d'un graphe. La formule suivante en permet le calcul:  $\text{nb cyclomatique} = \text{nb d'arcs} - \text{nb de sommets} + 1$ . Pour le graphe des liaisons de la figure 2.1 le nombre cyclomatique est égal à  $7 - 5 + 1 = 3$ .

### 2.1.3.2 Schéma cinématique

Le schéma cinématique d'un mécanisme présente les pièces dans leur plus simple expression (ligne, cercle, ...) et les liaisons par des symboles normalisés. Le tableau 2.1 introduit les dix liaisons mécaniques élémentaires. Pour chacune, le tableau fournit un schéma représentatif, ainsi que la symbolisation plane normalisée conforme à la norme NF E 04-015 (ISO 3952). De plus, les mouvements relatifs permis par les liaisons y sont indiqués.

**Tableau 2.1: Liaisons mécaniques élémentaires**

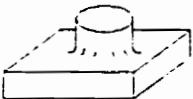

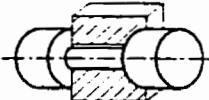
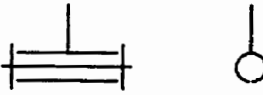
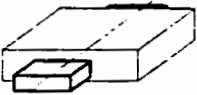
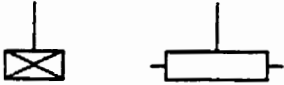
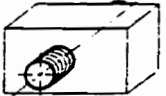
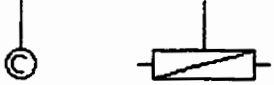
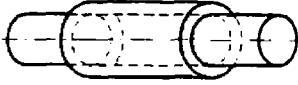
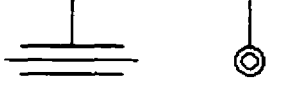

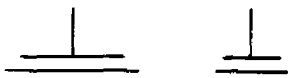
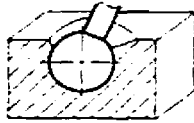
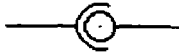


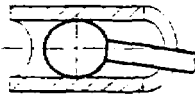
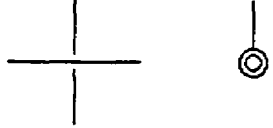
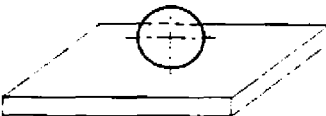

Désignation	Schéma représentatif	Symbolisation plane normalisée	Mouvements relatifs
Liaison encastrement			0 rotation 0 translation
Liaison pivot			1 rotation 0 translation
Liaison glissière			0 rotation 1 translation
Liaison glissière hélicoïdale			1 rotation 1 translation conjuguées

Tableau 2.1: Liaisons mécaniques élémentaires (suite)

Désignation	Schéma représentatif	Symbolisation plane normalisée	Mouvements relatifs
Liaison pivot glissant			1 rotation 1 translation
Liaison appui plan			1 rotation 2 translations
Liaison rotule			3 rotations 0 translation
Liaison linéaire rectiligne			2 rotations 2 translations
Liaison linéaire annulaire			3 rotations 1 translation
Liaison ponctuelle			3 rotations 2 translations

## 2.1.4 Les torseurs

### 2.1.4.1 Définition d'un torseur

Un torseur  $\{\tau\}$  est un ensemble de deux champs vectoriels: un champ constant et un champ de moments. Le champ constant ou invariant est représenté par un même vecteur, nommé résultante  $\vec{R}$ , en tout point de l'espace. Une des propriétés fondamentales des

champs de moments est l'équiprojectivité qui conduit au théorème des moments. Ce théorème stipule que le vecteur moment au point B est égal au vecteur moment au point A auquel on ajoute le produit vectoriel de la résultante avec le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , soit:

$$\vec{M}_{(B,\tau)} = \vec{M}_{(A,\tau)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (2.1)$$

#### 2.1.4.2 Opérations sur les torseurs

##### 1) Égalité de deux torseurs, $\{\tau_1\}_I = \{\tau_2\}_I$

Deux torseurs sont égaux en un point I si et seulement si leurs champs constants sont égaux et leurs champs de moments, exprimé en ce point I, sont égaux.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}(\tau_1) = \vec{R}(\tau_2) \\ \vec{M}(I, \tau_1) = \vec{M}(I, \tau_2) \end{cases} \quad (2.2)$$

##### 2) Somme de deux torseurs, $\{\tau\}_I = \{\tau_1\}_I + \{\tau_2\}_I$

La somme de deux torseurs en un point I correspond à la somme de leur champ constant respectif et à la somme de leur champ de moments exprimé au point I.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}(\tau) = \vec{R}(\tau_1) + \vec{R}(\tau_2) \\ \vec{M}(I, \tau) = \vec{M}(I, \tau_1) + \vec{M}(I, \tau_2) \end{cases} \quad (2.3)$$

##### 3) Produit d'un torseur par un scalaire, $\{\tau\}_I = \lambda \cdot \{\tau_1\}_I$

Le produit d'un torseur par un scalaire est égal au produit du champ constant et du champ de moments par ce scalaire.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}(\tau) = \lambda \cdot \vec{R}(\tau_1) \\ \vec{M}(I, \tau) = \lambda \cdot \vec{M}(I, \tau_1) \end{cases} \quad (2.4)$$

Cette opération est associative pour la multiplication des scalaires, distributive par rapport à l'addition des scalaires et distributive par rapport à l'addition des torseurs.

#### 4) Produit (comoment) de deux torseurs

Le produit de deux torseurs a pour résultat un scalaire. Il consiste à multiplier (produit scalaire) le champ constant du premier torseur avec le champ de moments du second et d'y ajouter le produit du champ constant du deuxième torseur avec le champ de moments du premier. Les deux torseurs doivent être exprimés au même point.

$$\Rightarrow \{\tau_1\}_I \otimes \{\tau_2\}_I = \bar{R}(\tau_1) \cdot \bar{M}(I, \tau_2) + \bar{R}(\tau_2) \cdot \bar{M}(I, \tau_1) \quad (2.5)$$

#### 2.1.4.3 Torseurs statique et cinématique

Soit la liaison  $\ell_{1-2}$  entre deux pièces  $P_1$  et  $P_2$ . Le torseur statique  $\{\tau\}$  représente la résultante  $\bar{R}$  et le moment  $\bar{M}$  des actions de contact de  $P_1$  sur  $P_2$  en un point  $I$  quelconque. Ce sont les éléments de réduction en  $I$  du torseur  $\{\tau\}$ . Ce torseur est noté:

$$\left\{ \tau'_{(P_1 \rightarrow P_2)} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}_{(P_1 \rightarrow P_2)}^{\ell_{1-2}} \\ \bar{M}_{(I, P_1 \rightarrow P_2)}^{\ell_{1-2}} \end{array} \right\}_I \quad (2.6)$$

Le torseur des actions de contact de  $P_2$  sur  $P_1$  en un point  $I$  est égal à moins le torseur des actions de contact de  $P_1$  sur  $P_2$  en ce point  $I$ .

$$\left\{ \tau'_{(P_2 \rightarrow P_1)} \right\}_I = - \left\{ \tau'_{(P_1 \rightarrow P_2)} \right\}_I \quad (2.7)$$

Le torseur cinématique  $\{\vartheta\}$  caractérise le mouvement de  $P_2$  par rapport à  $P_1$ , en un point  $I$  quelconque, par sa vitesse angulaire  $\bar{\Omega}$  et sa vitesse linéaire  $\bar{V}$ . Ce sont les éléments de réduction en  $I$  du torseur  $\{\vartheta\}$ . Ce torseur est noté:

$$\left\{ \vartheta'_{(P_2/P_1)} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\Omega}_{(P_2/P_1)}^{\ell_{1-2}} \\ \bar{V}_{(I, P_2/P_1)}^{\ell_{1-2}} \end{array} \right\}_I \quad (2.8)$$

Le torseur caractérisant le mouvement de  $P_1$  par rapport  $P_2$  en un point  $I$  est égal à moins le torseur caractérisant le mouvement de  $P_2$  par rapport  $P_1$  en ce point  $I$ .

$$\left\{ \vartheta'_{(P_1/P_2)} \right\}_I = - \left\{ \vartheta'_{(P_2/P_1)} \right\}_I \quad (2.9)$$

#### 2.1.4.4 Torseurs associés aux liaisons parfaites

À chaque liaison mécanique parfaite sont adjoints un torseur statique et un torseur cinématique. Dans le but d'obtenir le nombre maximal de composantes nulles propre à caractériser ces torseurs, ceux-ci sont exprimés dans un repère local associé à la liaison. L'origine de ce repère correspond généralement au centre géométrique de la liaison, c'est-à-dire le lieu des centres admissibles. Les axes du repère local doivent, pour leur part, tenir compte de la géométrie particulière de la liaison: axes de symétries, axes de mouvements, normale à un plan de contact. Le tableau 2.2 présente, pour chaque liaison, la forme des torseurs, valide uniquement dans un repère local associé à la liaison, c'est à dire construit en respectant les conditions données à la quatrième colonne de ce tableau.

Tableau 2.2: Torseurs associés aux liaisons mécaniques parfaites

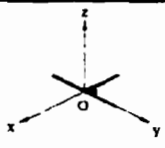
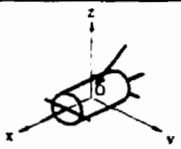
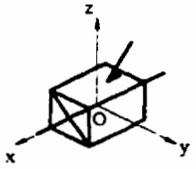
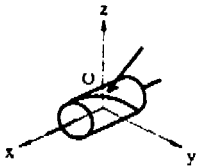
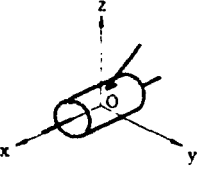
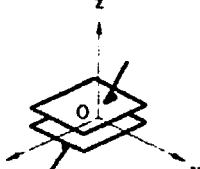
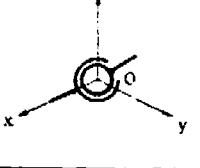
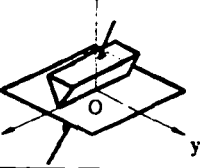
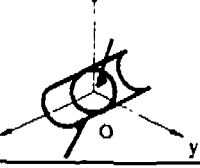
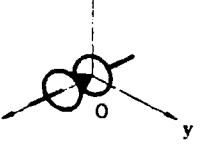
Désignation	Symb. spatiale normalisée	Torseur statique	Torseur cinématique	Conditions sur le choix d'un repère local
Liaison encastrement		$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Origine</i>: <math>\forall</math> point <math>\in xyz</math>.</li> <li>• <i>Axes</i>: Aucune direction n'est imposée.</li> </ul>
Liaison pivot		$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Origine</i>: <math>\forall</math> point <math>\in</math> axe de rotation x.</li> <li>• <i>Axes</i>: Un des axes doit être orienté selon l'axe de rotation x.</li> </ul>
Liaison glissière		$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Origine</i>: <math>\forall</math> point <math>\in xyz</math>.</li> <li>• <i>Axes</i>: Un des axes doit être dirigé selon la direction de glissement x.</li> </ul>



Tableau 2.2: Torseurs associés aux liaisons mécaniques parfaites (suite)

Désignation	Symb. spatiale normalisée	Torseur statique	Torseur cinématique	Conditions sur le choix d'un repère local
Liaison glissière hélicoïdale		$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} kX \\ M \\ N \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} ku \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Origine</i>: <math>\forall</math> point <math>\in</math> l'axe de rotation et de glissement x.</li> <li>• <i>Axes</i>: Un des axes doit être dirigé selon l'axe de rotation et de glissement x.</li> </ul>
Liaison pivot glissant		$\begin{Bmatrix} 0 \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ M \\ N \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Origine</i>: <math>\forall</math> point <math>\in</math> l'axe de rotation et de glissement x.</li> <li>• <i>Axes</i>: Un des axes doit être dirigé selon l'axe de rotation et de glissement x.</li> </ul>
Liaison appui plan		$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} L \\ M \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \\ 0 \end{vmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Origine</i>: <math>\forall</math> point <math>\in</math> xyz.</li> <li>• <i>Axes</i>: Un des axes doit être dirigé selon la normale au plan de contact, soit z.</li> </ul>
Liaison rotule		$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Origine</i>: Point au centre de rotulage, confondu avec les centres des deux sphères assemblées.</li> <li>• <i>Axes</i>: Aucune restriction.</li> </ul>
Liaison linéaire rectiligne		$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \\ 0 \end{vmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Origine</i>: <math>\forall</math> point <math>\in</math> plan xz.</li> <li>• Un des axes doit être orienté selon la droite de contact x, un autre selon la normale au plan tangent commun z.</li> </ul>
Liaison linéaire annulaire		$\begin{Bmatrix} 0 \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Origine</i>: Point au centre de la sphère.</li> <li>• <i>Axe</i>: Un des axes doit être dirigé selon x, l'axe du cylindre.</li> </ul>
Liaison ponctuelle		$\begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ v \\ w \end{vmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Origine</i>: Point de contact.</li> <li>• <i>Axes</i>: Un des axes doit être orienté selon la normale au plan tangent commun et passant par le point de contact, soit selon x.</li> </ul>

#### 2.1.4.5 Dualité entre torseurs statique et cinématique dans le cas des liaisons mécaniques parfaites

La liaison  $\ell_i$  étant parfaite (sans frottement), le principe fondamental de la dynamique, pour un système de deux pièces  $P_1$  et  $P_2$ , implique que la puissance des actions mutuelles développée dans la liaison est nulle. Or la puissance est égale au comoment des torseurs statique et cinématique, soit:

$$P = \left\{ \tau_{(P_1 \rightarrow P_2)}^{\ell_i} \right\}_I \otimes \left\{ \mathfrak{g}_{(P_2/P_1)}^{\ell_i} \right\}_I = \bar{M}_{(L, P_1 \rightarrow P_2)}^{\ell_i} \cdot \bar{\Omega}_{(P_2/P_1)}^{\ell_i} + \bar{R}_{(P_2/P_1)}^{\ell_i} \cdot \bar{V}_{(L, P_1 \rightarrow P_2)}^{\ell_i} \quad (2.10)$$

Par conséquent, les inconnues statiques et cinématiques de la liaison doivent vérifier la relation:

$$Xu + Yv + Zw + \alpha L + \beta M + \lambda N = 0 \quad (2.11)$$

C'est donc que chaque monôme doit être nul. Comme il est impossible d'avoir absence de liaison et vitesse nulle pour une direction donnée, les deux termes d'un même monôme ne peuvent être nuls en même temps. Il y a donc un terme nul par monôme. Ainsi, pour toute liaison parfaite, la somme du nombre d'inconnues statiques,  $N_s$ , augmentée du nombre d'inconnues cinématiques,  $N_c$ , est égale à six, soit  $N_s + N_c = 6$ , d'où la dualité entre torseurs statique et cinématique dans le cas des liaisons mécaniques parfaites (sans frottement). Il est possible de vérifier cette propriété sur le tableau 2.2.

#### 2.1.5 Règles de composition des liaisons

En regard des notions exposées précédemment (torseur et graphe des liaisons), il est maintenant possible d'introduire les règles de composition des liaisons. Ces règles permettent de simplifier le graphe de structure d'un système mécanique en réduisant un ensemble de liaisons situées entre deux pièces (liaisons réalisées avec ou sans pièce

intermédiaire) en une liaison équivalente. Cette liaison doit transmettre la même action mécanique et autoriser le même mouvement. L'utilisation de ces règles facilite les études statique et cinématique. En effet, le nombre de liaisons dans le graphe de structure étant inférieur à celui du graphe initial, il en découle un moins grand nombre de torseurs à manipuler.

### 2.1.5.1 Liaisons en parallèle

Par définition,  $n$  liaisons  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i, \dots, \ell_n$  sont disposées en parallèle entre deux pièces  $P_1$  et  $P_2$  si chaque liaison relie directement les deux pièces. Dans ce cas, le graphe des liaisons à étudier est du type illustré à la figure 2.2.  $\tau_{\text{ext} \rightarrow P_2}$  représente l'ensemble des efforts extérieurs agissant sur  $P_2$ .

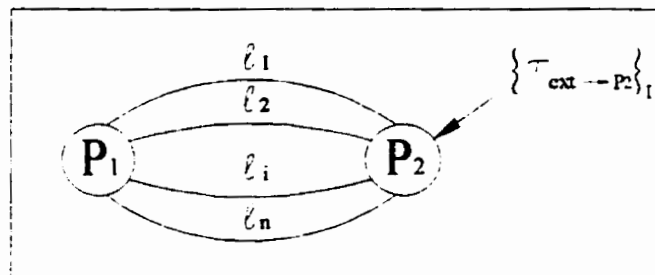


Figure 2.2: Liaisons en parallèle

#### Point de vue statique

L'application du principe fondamental de la statique sur  $P_2$  énonce que la somme des forces et celle des moments, calculée en un point  $I$  quelconque, doivent être nulle, soit:

$$\sum_{i=1}^n \{\tau_{(P_1 \rightarrow P_2)}'\}_I + \{\tau_{(\text{ext} \rightarrow P_2)}\}_I = \{\vec{0}\} \quad (2.12)$$

En écrivant le principe fondamental avec le torseur statique de la liaison équivalente, on obtient:

$$\{\tau_{(P_1 \rightarrow P_2)}^{\text{Equivalente}}\}_I + \{\tau_{(\text{ext} \rightarrow P_2)}\}_I = \{\vec{0}\} \quad (2.13)$$

En comparant ces deux équations, il s'ensuit que le torseur de la liaison équivalente aux  $n$  liaisons s'exprime par:

$$\left\{ \tau_{(P_1 \rightarrow P_2)}^{\ell_{\text{équivalente}}} \right\}_I = \sum_{i=1}^n \left\{ \tau_{(P_1 \rightarrow P_2)}^{\ell_i} \right\}_I \quad (2.14)$$

### Point de vue cinématique

Il faut assurer, dans ce cas, la compatibilité des mouvements permis par chaque liaison, ce qui se traduit par:

$$\left\{ \mathfrak{g}_{(P_2/P_1)}^{\ell_{\text{équivalente}}} \right\}_I = \left\{ \mathfrak{g}_{(P_2/P_1)}^{\ell_1} \right\}_I = \left\{ \mathfrak{g}_{(P_2/P_1)}^{\ell_2} \right\}_I = \dots = \left\{ \mathfrak{g}_{(P_2/P_1)}^{\ell_i} \right\}_I = \dots = \left\{ \mathfrak{g}_{(P_2/P_1)}^{\ell_n} \right\}_I \quad (2.15)$$

### 2.1.5.2 Liaisons en série

Par définition,  $n$  liaisons  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i, \dots, \ell_n$  sont disposées en série entre deux pièces  $P_1$  et  $P_n$  si elles sont placées l'une à la suite de l'autre par l'intermédiaire de  $(nb \text{ de liaisons}-1)$  pièces. Dans ce cas le graphe des liaisons correspondant est illustré à la figure 2.3.

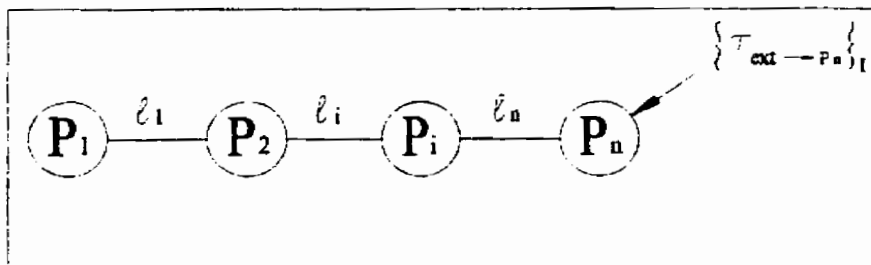


Figure 2.3: Liaisons en série

### Point de vue statique

Le principe fondamental de la statique appliqué à chacune des pièces permet d'écrire:

$$\left\{ \tau_{(P_1 \rightarrow P_2)}^{\ell_1} \right\}_I = \left\{ \tau_{(P_2 \rightarrow P_i)}^{\ell_i} \right\}_I = \left\{ \tau_{(P_i \rightarrow P_n)}^{\ell_n} \right\}_I = \left\{ \tau_{(P_n \rightarrow \text{ext})} \right\}_I \quad (2.16)$$

En écrivant le principe fondamental de la statique appliqué à  $P_n$  avec le torseur de la liaison équivalente de l'action mécanique de  $P_1$  sur  $P_n$  on a:

$$\left\{ \tau_{(P_1 \rightarrow P_n)}^{\ell_{\text{équivalente}}} \right\}_I = \left\{ \tau_{(P_n \rightarrow \text{ext})} \right\}_I \quad (2.17)$$

En comparant les équations précédentes, il s'ensuit que

$$\left\{ \tau_{(P_1 \rightarrow P_n)}^{\ell_{\text{équivalente}}} \right\}_I = \left\{ \tau_{(P_1 \rightarrow P_2)}^{\ell_1} \right\}_I = \left\{ \tau_{(P_{i-1} \rightarrow P_i)}^{\ell_i} \right\}_I = \dots = \left\{ \tau_{(P_{n-1} \rightarrow P_n)}^{\ell_n} \right\}_I \quad (2.18)$$

Cette relation traduit la compatibilité du torseur transmissible à travers les  $n$  liaisons.

### ***Point de vue cinématique***

Le mouvement de  $P_n$  par rapport à  $P_1$  résulte de la composition vectorielle des mouvements de  $P_n/P_{n-1}$ , ...,  $P_{i+1}/P_i$ , ...,  $P_2/P_1$  soit:

$$\left\{ \mathfrak{g}_{(P_n/P_1)}^{\ell_{\text{équivalente}}} \right\}_I = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \mathfrak{g}_{(P_{i+1}/P_i)}^{\ell_i} \right\}_I \quad (2.19)$$

## **2.1.6 Étude statique d'un mécanisme**

L'étude statique s'effectue pour une position donnée du mécanisme. Elle consiste à appliquer le principe fondamental de la statique à chacune des pièces du système mécanique mis à part le bâti. Il en résulte un système linéaire comportant  $E_s$  équations statiques et  $I_s$  inconnues statiques.

## **2.1.7 Étude cinématique d'un mécanisme**

L'étude cinématique, comme l'étude statique, s'effectue pour une position donnée du mécanisme. Elle consiste à vérifier, pour chacun des cycles indépendants constituant la base de cycle du mécanisme, l'équation  $\left\{ \mathfrak{g}_{(P_i/P_i)} \right\} = 0$ , c'est-à-dire que le mouvement relatif d'une pièce par rapport à elle-même est nul. Le mouvement d'une pièce appartenant à un cycle étant contraint par chacune des liaisons de ce cycle, il en résulte

que:  $\sum_{i=1}^n \{g'_i\}_1 = \{\bar{0}\}$ . Il en découlera un système linéaire comportant  $E_c$  équations cinématiques et  $I_c$  inconnues cinématiques.

### 2.1.8 Étude du degré d'hyperstatisme

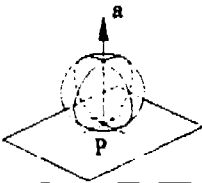
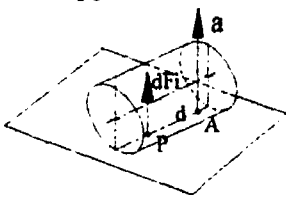
Le degré d'hyperstatisme ou hyperstaticité d'un mécanisme peut être obtenu en soustrayant le nombre d'équations d'équilibre indépendantes du nombre d'inconnues. Cette façon de faire exige cependant d'avoir préalablement effectué ou l'analyse statique, ou l'analyse cinématique du mécanisme, lesquelles peuvent s'avérer très laborieuses. Une alternative pour connaître rapidement l'envergure du problème auquel on s'attaque consiste à faire l'étude du degré d'hyperstatisme du système. Les fondements de cette étude reposent sur la théorie de l'algèbre linéaire. Le lecteur intéressé peut se référer à l'article de Siestrunk (1973) pour en savoir d'avantage. Pour les besoins de ce travail, seule une procédure simplifiée sera exposée au chapitre III.

## 2.2 Spécification du tolérancement géométrique

Bien que beaucoup de travaux dans le domaine du tolérancement géométrique aient été réalisés ces dernières années, très peu traitent de la spécification du tolérancement géométrique. La modélisation, l'analyse et la synthèse des tolérances ont constitué les principales avenues de recherche. La revue bibliographique effectuée par Rivest (1993), dans le cadre de sa thèse de doctorat, dresse l'inventaire des différents travaux réalisés sur ces sujets. Les problèmes de cotation fonctionnelle ne sont pas non plus considérés dans les ouvrages décrivant les normes, la finalité de ces ouvrages étant simplement de fournir un langage formel, code ou syntaxe adapté. Dans ce qui suit, les quelques travaux tendant à se rapprocher le plus d'une méthodologie de spécification du tolérancement géométrique seront présentés.

Le Borzec et Lotterie (1976) proposent une démarche d'analyse d'un mécanisme basé sur un modèle de système mécanique orienté liaisons. La première étape de cette méthode consiste à réaliser le décodage global du mécanisme, lequel se traduit par un schéma cinématique et l'équivalent d'un graphe des liaisons. Il s'agit ensuite d'associer à chacune des liaisons mécaniques un modèle de liaisons cinématiques, de même que les torseurs statique et cinématique correspondant. La particularité de la méthode vient du fait que les torseurs mécaniques associés aux liaisons sont caractérisés par rapport aux éléments géométriques propres à chacune d'elles. À titre d'exemple, le tableau 2.3 illustre les torseurs mécaniques résultants dans le cas de l'appui simple (liaison ponctuelle) et de l'appui linéaire (liaison linéaire rectiligne). La forme analytique de ces torseurs, dans un référentiel général, est obtenue en paramétrant d'abord les éléments géométriques propres à la liaison, puis en exprimant par rapport à ces éléments géométriques les particularités de la liaison. Ce paramétrage a pour effet d'introduire autant d'inconnues supplémentaires que de relations particulières indépendantes.

**Tableau 2.3: Torseurs mécaniques caractérisés par rapport aux éléments géométriques de la liaison**

Modèle de liaison	Éléments géométriques de la liaison	Torseur statique	Torseur cinématique
<b>Appui simple</b> 	P: point de contact a: direction de la normale	$\{\tau\}_P = \begin{Bmatrix} R = R \cdot a \\ M = 0 \end{Bmatrix}_P$ avec $R \cdot M = 0$	$\{s\}_P = \begin{Bmatrix} \Omega \\ V_P \end{Bmatrix}_P$ avec $V_P \cdot a = 0$
<b>Appui linéaire</b> 	A: point de contact a: direction de la normale d: droite de contact	$\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R = \sum dF_i \\ M = \sum AP_i \wedge dF_i \end{Bmatrix}_A$ avec $\begin{cases} R = R \cdot a \\ M \cdot a = 0 = M \cdot R \\ M \cdot d = 0 \end{cases}$	$\{s\}_A = \begin{Bmatrix} \Omega \\ V_A \end{Bmatrix}_A$ avec $\begin{cases} (\Omega \wedge d) \cdot a = 0 \\ V_A \cdot a = 0 \end{cases}$

Les auteurs effectuent finalement les analyses statique et cinématique du mécanisme et ce, au moyen de l'algèbre linéaire. Ils parviennent à déterminer le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme, de même que leur source, mais s'aventurent peu sur le tolérancement géométrique à apporter pour y remédier.

Clément, Rivière et Temmerman (1994) proposent les concepts d'Élément Géométrique de Référence Minimum (EGRM) et de Surfaces Associées Topologiquement et Technologiquement (SATT) pour structurer la démarche de spécification du tolérancement géométrique. L'EGRM constitue un repère, complet ou partiel, permettant de représenter la position et l'orientation d'un SATT (Rivest 1993). Un SATT est une paire de surfaces ou de SATT, ou une paire composée d'une surface et d'un SATT appartenant au même solide et dont on souhaite manipuler la position d'ensemble. Basé sur la théorie des groupes de déplacement (Hervé, 1976), ils ont défini 7 classes de surfaces: les surfaces sphériques, planes, cylindriques, hélicoïdales, de révolution, prismatiques et quelconques, lesquelles sont laissées globalement invariantes par un des sous-groupes de déplacement. À partir de ces surfaces, ils ont mis en évidence l'existence de 28 possibilités différentes d'association et 44 cas de reclassement d'un SATT à partir de la connaissance des SATT composants et de leur position relative. Pour chacun des cas recensés, un tolérancement géométrique a été défini. Le lecteur intéressé peut consulter l'annexe II, où le tableau des 7 classes de surfaces et celui des 44 cas de reclassement, de même qu'un exemple de tolérancement d'un SATT, tous tirés de l'ouvrage original de Clément et al. (1994), sont présentés. La première étape de la démarche avancée, pour effectuer la cotation fonctionnelle d'une pièce réalisant une liaison mécanique donnée, consiste à identifier toutes les surfaces fonctionnelles de cette pièce. Il s'agit ensuite de choisir parmi ces surfaces celles qui sont prépondérantes, de les regrouper et de déterminer à quel cas de reclassement cette association de surfaces correspond. Le tolérancement géométrique définit pour ce cas est alors appliqué directement sur la pièce. On procède ensuite au regroupement des surfaces fonctionnelles



restantes avec le SATT ou au regroupement des SATT eux-mêmes, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul SATT regroupant toutes les surfaces fonctionnelles. À chaque association intermédiaire, il faut trouver le cas de reclassement et appliquer le tolérancement géométrique correspondant sur la pièce. Dans le cas où une pièce réalise plus d'une liaison mécanique, les auteurs affirment que la synthèse peut s'effectuer de manière cohérente par simple superposition des différentes solutions, chaque solution de cotation utilisant le même EGRM de référence.

## **CHAPITRE III**

### **MÉTHODOLOGIE DE SPÉCIFICATION DU TOLÉRANCEMENT GÉOMÉTRIQUE**

Dans ce chapitre, une démarche logique pour effectuer le tolérancement géométrique d'un système mécanique, associé à son fonctionnement cinématique, est présentée. La méthodologie proposée repose sur l'analyse de la structure cinématique et des contraintes technologiques du mécanisme. Celle-ci est réalisée au moyen des outils présentés au chapitre précédent, soit les torseurs, le graphe des liaisons et le schéma cinématique. Le chapitre se divise en quatre sections. Les trois premières correspondent à chacune des étapes de la méthodologie de spécification élaborée. Ces étapes sont la modélisation du mécanisme, l'analyse hyperstatique et la spécification du tolérancement géométrique. Dans la dernière section, deux exemples, le moteur à explosion 2 temps et la pompe à corps déformable, permettent d'illustrer la méthode. Il est à noter que l'analyse développée ne permet pas de poser les contraintes fonctionnelles de fermeture de chaîne, qui impliquent la présence de jeux ou ajustements, les contraintes fonctionnelles d'interférence entre pièces, qui sont en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre, et les contraintes fonctionnelles de portée pour le maintien de la qualité des liaisons.

#### **3.1 Modélisation du mécanisme**

La première étape de l'étude d'un mécanisme consiste à réaliser la modélisation de celui-ci, laquelle se traduit sous forme de graphe des liaisons et de schéma cinématique. L'objet de cette modélisation est de donner une image simplifiée et symbolique du système mécanique afin d'en faciliter l'étude des mouvements, de même que celle des efforts. Les décisions prises à ce niveau ont une incidence directe sur les résultats ultérieurs, car toute l'étude repose sur ces deux représentations schématiques. Il est donc préférable de s'y attarder un peu plus longuement.

À partir du dessin d'ensemble, il faut d'abord identifier toutes les pièces intervenant dans la construction du mécanisme, et s'assurer de bien comprendre son fonctionnement. Une façon logique de procéder consiste à parcourir le système mécanique en partant de la pièce qui reçoit l'information d'entrée, et de proche en proche, se diriger vers la pièce assurant l'information de sortie. La majorité des produits n'ont pas un fonctionnement unique dans le temps, mais bien des modes de fonctionnement qui traduisent le découpage des fonctions à assurer (Dupinet, 1991). Ainsi, par exemple, une transmission de moteur hors-bord présente quatre modes de fonctionnement: marche avant, marche arrière, neutre et arrêt. Dépendant de l'état fonctionnel dans lequel se trouve le mécanisme, l'agencement des pièces, les unes par rapport aux autres, sera modifié, puisque des fonctions différentes sont à remplir. Communément, l'état fonctionnel le plus contraignant est préféré pour réaliser l'étude. De plus, s'il existe des mobilités cinématiques pour cet état fonctionnel, il est important de choisir une configuration des pièces qui n'entraîne pas de singularités cinématique et/ou géométrique. Cette configuration est nécessaire pour ne pas obtenir des résultats valides seulement dans certains cas particuliers.

Pour un état donné du mécanisme, il est toujours préférable de regrouper les éléments en contact n'entretenant aucun mouvement relatif, c'est-à-dire réalisant des liaisons encastrement. Effectivement, ces liaisons ont été créées pour des raisons d'ordre technologique: fabrication, entretien, montage. Elles ne modifient en rien la nature des hyperstatismes présents dans le système mécanique, puisqu'elles transmettent intégralement aussi bien les efforts que les mouvements (voir exemple 3.1). Dans le contexte du présent travail, les considérer a pour seul effet d'augmenter inutilement la complexité de l'analyse hyperstatique (deuxième étape de la méthodologie proposée). Les assemblages réalisés par soudage, collage et serrage sont autant d'exemples de telles liaisons. Une fois les regroupements effectués, il est possible de tracer le graphe des liaisons du mécanisme étudié. Il est à noter que les efforts extérieurs agissant sur les composants doivent être indiqués sur ce graphe.

### Exemple 3.1: Effet des liaisons encastrement

La figure 3.1 illustre trois pièces ( $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ ) reliées par des liaisons en série, dont l'une,  $\ell_{0-1}$ , est une liaison encastrement.

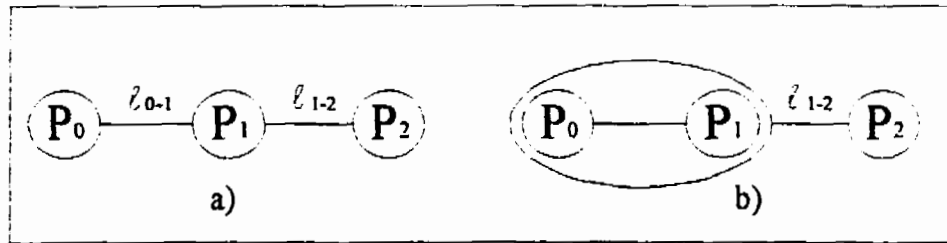


Figure 3.1: a) Liaisons en série quelconque; b) Liaisons en série regroupant les pièces en liaison encastrement

Soit,

$\ell_{0-1}$ : Liaison encastrement

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_{0-1}^1 \\ Y_{0-1}^1 \\ Z_{0-1}^1 \end{matrix} & \begin{matrix} L_{0-1}^1 \\ M_{0-1}^1 \\ N_{0-1}^1 \end{matrix} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad \left\{ \mathfrak{g}_{(1/0)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (3.1)$$

$\ell_{1-2}$ : Liaison pivot

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_{1-2}^1 \\ Y_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ M_{1-2}^1 \\ N_{1-2}^1 \end{matrix} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad \left\{ \mathfrak{g}_{(2/1)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_{1-2}^1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (3.2)$$

Les torseurs statique et cinématique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série (3.1a) sont:

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_{0-1}^1 = X_{1-2}^1 \\ Y_{0-1}^1 = Y_{1-2}^1 \\ Z_{0-1}^1 = Z_{1-2}^1 \end{matrix} & \begin{matrix} L_{0-1}^1 = 0 \\ M_{0-1}^1 = M_{1-2}^1 \\ N_{0-1}^1 = N_{1-2}^1 \end{matrix} \end{array} \right\} \quad \left\{ \mathfrak{g}_{(2/0)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 + \alpha_{1-2}^1 \\ 0 + 0 \\ 0 + 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 + 0 \\ 0 + 0 \\ 0 + 0 \end{matrix} \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Ces deux torseurs sont les mêmes que ceux obtenus en regroupant les pièces  $P_0$  et  $P_1$  (figure 3.1b), soit les torseurs statique et cinématique correspondant à la liaison  $\ell_{1-2}$ .

Il s'agit ensuite de déterminer les modèles de liaisons, reliant chaque groupe (sous-ensembles et/ou pièces) du graphe des liaisons. Pour ce faire, il faut étudier les mouvements relatifs entre les éléments ainsi que leurs inter-efforts. Les modèles de liaisons possibles ainsi que leur représentation schématique plane et spatiale, d'après la norme en vigueur, sont présentés aux tableaux 2.1 et 2.2 respectivement, page 11 et 15. Dans certains cas, le choix est direct. Par exemple, le modèle de liaison cinématique qui représente le plus fidèlement une liaison mécanique vis écrou, dans laquelle les éléments ont une rotation autour d'un axe proportionnelle à leur translation le long de cet axe, est la liaison hélicoïdale. Dans d'autres cas, par contre, la décision est plus difficile à prendre. Il est alors recommandé d'étudier l'effet des efforts extérieurs sur les composants, ainsi que les efforts internes à la liaison. Ce point sera élaboré plus en détails au chapitre IV, traitant de la détermination du modèle de liaison. Une fois les liaisons cinématiques définies, il est alors possible de dessiner le schéma cinématique qui servira de base pour la suite de l'étude. Aussi, les torseurs statiques, correspondant à chacune des liaisons, sont identifiés dans un repère local propre à la liaison. Ce dernier est construit en respectant les conditions d'orientation des axes fournies au tableau 2.2. L'origine de ce repère doit pour sa part correspondre au centre géométrique de la liaison (point O, tableau 2.2) pour des raisons qui seront exposées un peu plus loin. La convention de notation utilisée dans le présent travail est la suivante:

$$\left\{ \tau_{(i \rightarrow j)}^{(n)} \right\}_{O_R, x_R y_R z_R} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_{i-j}^{r(n)} \\ Y_{i-j}^{r(n)} \\ Z_{i-j}^{r(n)} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ M_{i-j}^{r(n)} \\ N_{i-j}^{r(n)} \end{matrix} \end{array} \right\} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} r: \text{repère local} \\ R: \text{Repère où l'équilibre est réalisé} \\ n: \text{Différentie deux liaisons en parallèle} \\ i \text{ et } j: \text{Groupes impliqués dans la liaison} \end{array} \quad (3.4)$$

La modélisation du mécanisme se résume donc aux étapes suivantes:

- 1) L'identification des pièces intervenant dans la construction du mécanisme et la compréhension de son fonctionnement.

- 2) Le regroupement des éléments en contact n'entretenant aucun mouvement relatif et la construction du graphe des liaisons.
- 3) La détermination du modèle de liaison cinématique correspondant à chacune des liaisons mécaniques et la construction du schéma cinématique.
- 4) L'identification des torseurs statiques correspondant à chacune des liaisons, dans un repère local propre à la liaison.

### **3.2 Analyse hyperstatique**

La deuxième étape de la méthodologie de spécification du tolérancement géométrique proposée est l'analyse hyperstatique. Elle consiste, dans un premier temps, à déterminer si le système mécanique étudié est isostatique ou hyperstatique. Advenant cette seconde éventualité, il s'agit d'établir les équations d'équilibre et d'identifier, à partir de ces équations, les sources d'hyperstatismes. Leurs répercussions sur chacun des groupes (sous-ensembles et/ou pièces) du mécanisme sont alors analysées.

#### **3.2.1 Étude du degré d'hyperstatisme**

Une façon de déterminer si un système mécanique est isostatique ou non est l'étude de son degré d'hyperstatisme. Les bases de cette étude étant quelque peu complexes, seules les lignes essentielles à sa réalisation sont ici exposées.

Il s'agit tout d'abord de trouver le nombre d'équations statiques ( $E_s$ ), ainsi que le nombre d'inconnues statiques ( $I_s$ ) mis en jeu dans l'étude du mécanisme. L'application du principe fondamental de la statique à chacun des sous-ensembles du graphe des liaisons, à l'exception du bâti, conduit à :  $E_s = 6 \times [(\text{nombre de sous-ensembles}) - 1]$ . Il est en effet inutile de considérer le bâti puisque les équations découlant de son équilibre peuvent être déduites de l'équilibre des autres sous-ensembles. Pour ce qui est du nombre d'inconnues

statiques, un décompte direct peut être fait à partir des torseurs correspondant à chacune des liaisons. Le degré d'hyperstatisme se calcule alors à l'aide de la formule:  $m_e = m - m_c$  avec  $m = E_s - I_s$  et  $m_c = m_c^{int} + m_c^{ext}$ .

Le degré de mobilité cinématique interne ( $m_c^{int}$ ) correspond au nombre de mouvements cinématiquement compatibles avec les liaisons mécaniques, mais non excités par les mouvements d'entrée. Ces mobilités étant indéterminées, les variables statiques et cinématiques qui leurs sont associées sont donc elles aussi indéterminées, et augmentent le degré d'hyperstatisme. La détermination de ( $m_c^{int}$ ) n'est malheureusement pas toujours facile et requiert généralement une certaine habileté de l'ingénieur à lire des plans et saisir le fonctionnement du système mécanique.

Le degré de mobilité cinématique externe ( $m_c^{ext}$ ) représente le nombre de variables cinématiques indépendantes imposées par la nature du mécanisme ou des contraintes de conception. Ces variables externes correspondent à des vitesses d'entrée, de sortie ou de commande du système mécanique. Les relations entre celles-ci sont telles que les vitesses de sortie peuvent toujours être calculées à partir des vitesses d'entrée et de commande, et ce, nonobstant le type de mécanisme. De ce fait, le degré de mobilité cinématique externe est posé comme étant égal à la somme du nombre de vitesses d'entrée et de commande. La présence d'une mobilité cinématique externe indépendante sur un composant a pour impact d'augmenter le degré d'hyperstatisme du système mécanique. En effet, puisque par définition cette mobilité implique qu'il n'y a pas d'effort agissant sur le composant, il devient donc impossible de déterminer l'effort de réaction associé à cette mobilité.

Dans le cas d'un système isostatique,  $m_e = 0$ , tandis que pour un système hyperstatique,  $m_e < 0$ . Dans ce dernier cas, la valeur obtenue permettra ultérieurement de valider (en partie) les résultats de l'étude statique.

### 3.2.2 Étude statique

Dans l'hypothèse d'un système mécanique dont le degré d'hyperstatisme est inférieur à zéro, une étude statique est requise. Elle consiste à appliquer le principe fondamental de la statique à chacun des groupes constituant le graphe des liaisons du mécanisme étudié. De manière à faciliter l'identification des sources d'hyperstatismes et la façon dont elles se traduisent sur les composants, les équations les plus élémentaires doivent être obtenues. C'est pourquoi, plutôt que de réaliser l'équilibre de chacun des groupes dans un repère global, celui-ci est effectué dans un référentiel distinct à chacun d'eux. Il sera donc question, en tout premier lieu, de définir la procédure permettant d'adjoindre un tel référentiel à chacun des composants du graphe de structure, lequel sera appelé repère groupe.

Comme mentionné à la section 2.1.4.4, les torseurs statique et cinématique d'une liaison quelconque exhibent leur forme la plus simple (nombre maximal de zéro) dans un repère local associé à la liaison. Or, la détermination de ces référentiels inclue nombre de choix arbitraires. Par exemple, pour la liaison pivot glissant, seule l'orientation d'un des axes est spécifiée (voir tableau 2.2, page 16), les autres étant laissées à la discrétion de l'ingénieur. De même, l'origine du repère associé à cette liaison peut se situer n'importe où sur son axe de rotation, ce qui implique, ici encore, un choix. C'est en tirant avantage des latitudes permises dans la détermination des référentiels locaux, associés aux liaisons impliquées dans l'équilibre d'un composant, qu'on construit son repère groupe.

En ce qui concerne le choix de l'origine des repères locaux, bien que le tableau 2.2 offre plusieurs options dans le cas de certaines liaisons (telle la liaison pivot glissant citée ci-haut), l'origine doit toujours se trouver au centre géométrique de la liaison (point O, tableau 2.2). En effet, il a été observé qu'un choix autre a pour conséquence de fausser l'interprétation des résultats, tant en ce qui a trait aux sources d'hyperstatisme qu'à leurs



répercussions. La raison est que l'application du théorème des moments engendre, selon le point choisi, la présence de termes induits d'efforts parmi ceux des moments. Si le point est pris à un endroit sans réelle signification du point de vue de la transmission des efforts, il peut arriver que ces termes soient camouflés dans ceux des moments, erronant ainsi toute l'analyse statique.

Il s'agit donc essentiellement d'établir s'il est possible d'orienter les systèmes d'axes des repères locaux des liaisons contraignant un sous-ensemble, à partir du champ des possibilités offert de par leur définition. Deux situations se présentent, lesquelles sont illustrées à la figure 3.2. Les considérations qui suivent reprennent chacune d'elles.

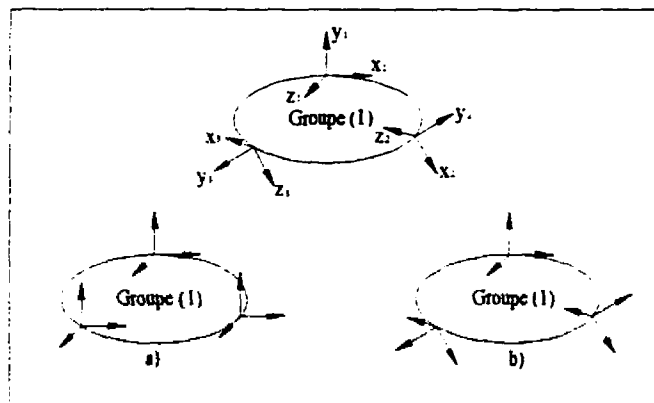


Figure 3.2: Construction des repères groupes

Soit le groupe (1) appartenant au graphe de structure du système mécanique considéré. Celui-ci est contraint par trois liaisons dont les référentiels locaux sont respectivement  $O_1, x_1 y_1 z_1$ ,  $O_2, x_2 y_2 z_2$  et  $O_3, x_3 y_3 z_3$ .

La figure 3.2 a) montre le cas où, de par la nature des liaisons impliquées, il est possible d'aligner les systèmes d'axes des repères locaux de façon analogue. Dans ces circonstances, il est opportun de prendre pour orientation du repère groupe, celle commune à tous les repères locaux et comme origine, l'origine de la liaison comportant le plus d'inconnues statiques. À cet égard, il est indispensable de faire usage du théorème

des moments (équation 2.1, page 13) pour ramener les torseurs des autres liaisons en ce point. Il peut être intéressant d'évaluer s'il est possible d'orienter le repère groupe résultant selon les paramètres de mise en position relative, en translation, des éléments de base constituant les liaisons (le point, la droite et le plan). Les équations résultantes en seront d'autant plus simples. Le tableau 3.1 rappelle quels sont ces paramètres en fonction des éléments de bases.

**Tableau 3.1: Paramètres de position relative en translation**

	Point	Droite	Plan
Point	<i>distinct:</i> Droite passant par les deux points <i>confondus:</i> Point commun	<i>Point <math>\notin</math> à la droite:</i> Perpendiculaire ( $\perp$ ) issue de la droite, passant par le point <i>Point <math>\in</math> à la droite:</i> Point $\in$ à la droite	<i>Point <math>\notin</math> au plan:</i> $\perp$ au plan, passant par le point <i>Point <math>\in</math> au plan:</i> Point appartenant au plan
Droite		<i>Parallèles (//) distinctes:</i> $\perp$ au deux droites en un point quelconque <i>// confondues:</i> Droite commune <i>Sécantes:</i> Point d'intersection	<i>// distincts:</i> $\perp$ au plan et à la droite en un point qcq. <i>// confondus:</i> Droite commune <i>Sécants:</i> Point d'intersection
Plan			<i>// distincts:</i> $\perp$ commune aux deux plans <i>// confondus:</i> Plan commun <i>Sécants:</i> Droite d'intersection

NB.: On fait ici l'hypothèse que la droite et le plan sont infinis

À l'opposé de ce qui précède, il se peut qu'il soit irréalisable d'orienter de la même façon les systèmes d'axes des liaisons impliquées dans l'équilibre du groupe (figure 3.2b). Si tel est le cas, il est indiqué de prendre comme référentiel groupe, le repère local de la liaison la plus contrainte, c'est-à-dire celle comportant le plus d'inconnues statiques. Pour les

repères locaux des autres liaisons, ce sont des considérations géométriques qui présideront à leur orientation, afin de simplifier les changements de repères. En effet, il convient dans une telle situation, d'effectuer les changements de bases et d'appliquer le théorème des moments (équation 2.1, page 13), afin d'exprimer les torseurs associés aux autres liaisons dans le repère groupe. Les relations de changements de base s'expriment sous la forme générale:

$$\begin{aligned}
 X_{1-2}^G &= f(X_{1-2}^1, Y_{1-2}^1, Z_{1-2}^1) & L_{1-2}^G &= f(L_{1-2}^1, M_{1-2}^1, N_{1-2}^1) \\
 Y_{1-2}^G &= g(X_{1-2}^1, Y_{1-2}^1, Z_{1-2}^1) & M_{1-2}^G &= g(L_{1-2}^1, M_{1-2}^1, N_{1-2}^1) \\
 Z_{1-2}^G &= h(X_{1-2}^1, Y_{1-2}^1, Z_{1-2}^1) & N_{1-2}^G &= h(L_{1-2}^1, M_{1-2}^1, N_{1-2}^1)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dans chacun des cas discutés plus haut, il peut arriver que seul un certain nombre des repères locaux satisfassent aux conditions de similitude d'orientation des axes. Deux choix sont alors possibles. Le premier consiste à construire le repère groupe en tenant compte uniquement des repères locaux répondant aux critères. L'autre est de prendre le référentiel local de la liaison la plus contrainte comme repère groupe. Il faut alors vérifier quelle option permet d'obtenir les équations les plus simples.

Une fois le repère groupe d'un sous-ensemble établi et les torseurs statiques des liaisons concernées exprimés dans ce référentiel, il est possible d'appliquer le principe fondamental de la statique à ce composant.

Bien que non mentionné jusqu'à présent, il est habituellement préférable d'utiliser les règles de composition des liaisons en parallèle (voir section 2.1.5.1) pour simplifier le graphe de structure d'un mécanisme, et ce, avant d'entreprendre son étude statique. Ceci, rappelons-le, a pour objet de réduire le nombre des torseurs à manipuler. La façon de déterminer le repère groupe d'un sous-ensemble peut également servir pour établir le référentiel dans lequel la liaison équivalente à un nombre  $x$  de liaisons en parallèle sera

calculée. Les critères s'appliqueront, dans ce cas, aux repères locaux des liaisons disposées en parallèle entre deux pièces.

### 3.2.2.1 Phénomènes de frottement

Lors de l'établissement du modèle technologique de départ, l'hypothèse de liaisons sans dissipation d'énergie a été posée. Il est plus juste de dire que le frottement nuisible est pris en compte mais n'intervient pas dans l'analyse, celle-ci étant réalisée pour un fonctionnement en régime permanent. Il importe ici de souligner que dans certains systèmes mécaniques, par exemples les variateurs de vitesse par friction et les freins, le frottement est présent en régime établi, puisque indispensable à la transmission des efforts. Il se doit donc d'être considéré. Dans un cas comme dans l'autre, toutefois, les phénomènes de frottement (utile ou nuisible) n'influent pas sur le nombre de sources d'hyperstatisme.

À preuve, soit le contact ponctuel entre deux pièces  $P_1$  et  $P_2$  (voir figure 3.3). En considérant la liaison sans frottement, le seul degré de liberté supprimé est la translation suivant l'axe des  $y$ . Si maintenant l'effet de l'adhérence ou du frottement est pris en compte, tout mouvement de  $P_1$  par rapport à  $P_2$  engendrera un effort résistant dans la même direction mais de sens opposé à la vitesse de glissement  $\bar{g}_{1/2}$  de  $P_1$  par rapport à  $P_2$ . Il s'ensuit que les deux translations suivant  $x$  et  $z$  vont être partiellement bloquées de par ces efforts résistants. Le terme partiellement bloqué est utilisé car le blocage va dépendre de la répartition des efforts et du coefficient de frottement au contact entre  $P_1$  et  $P_2$ .

En effet, avant que le mouvement ne soit possible, la résultante  $\vec{F}$  reste incluse à l'intérieure du cône d'angle  $\varphi$ , ce qui correspond au phénomène d'adhérence pour lequel:  $\bar{g}_{1/2} = \vec{0}$  et  $\|\vec{T}\| \leq \|\vec{N}\| \cdot \operatorname{tg} \varphi$ . Autrement dit, le module de la composante tangentielle  $\vec{T}$  de

la résultante des efforts appliqués à  $P_1$ , autre que ceux imposés par  $P_2$ , est insuffisant pour provoquer le mouvement. Les translations suivant  $x$  et  $z$  sont donc bloquées. Cependant, les efforts en  $x$  et  $z$ , occasionnés par ce frottement, sont dépendants de celui en  $y$  par l'intermédiaire du coefficient de frottement, et donc ne génèrent pas de source d'hyperstatisme supplémentaire.

Si maintenant le module de la composante tangentielle devient suffisant pour vaincre l'adhérence (régime permanent), le mouvement va s'établir, et pendant toute la durée du mouvement, la force résultante sera inclinée de l'angle  $\varphi$  (angle de frottement) par rapport à la normale au contact. Il en résulte que:  $\vec{g}_{1/2} \neq \vec{0}$  et  $\|\vec{T}\| = \|\vec{N}\| \cdot \operatorname{tg} \varphi$ . Dans ce cas, les degrés de liberté suivant  $y$  et  $z$  sont toujours disponibles.

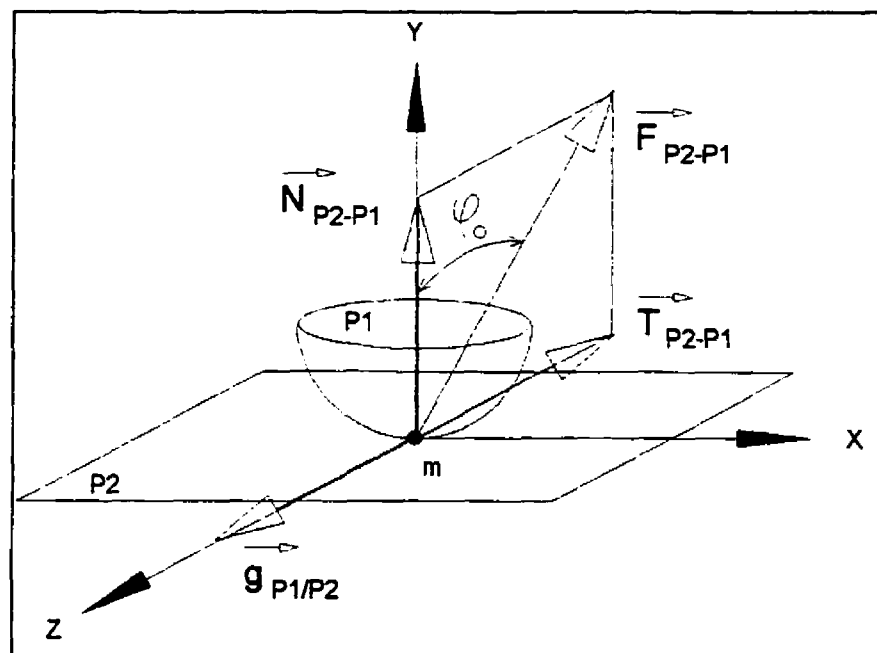


Figure 3.3: Phénomènes de frottement

Du fait que dans le cas où des composantes de frottement sont ajoutées, celles-ci restent en tout état de cause connues, et il est possible d'affirmer que les phénomènes de

frottement ou de résistance au roulement n'influent pas sur le nombre des sources d'hyperstatisme.

### 3.2.3 Identification des sources d'hyperstatisme

Le principe fondamental de la statique, appliqué à chacun des composants du graphe des liaisons d'un mécanisme hyperstatique, a pour résultat un système d'équations linéaires. Il a été vu que la résolution d'un tel système exige l'introduction des relations d'effort - déplacement et de compatibilité géométrique. De plus, il est indispensable, pour déterminer la valeur des inconnues du système, que toutes les équations soient exprimées dans le même référentiel. Étant donné que l'étude statique de chacun des composants est réalisée dans un repère groupe distinct, il apparaît donc nécessaire d'avoir recours aux relations de changement de bases, vues précédemment.

Cependant, il a été observé qu'en ce qui a trait à l'identification des sources d'hyperstatisme et de leurs répercussions sur les groupes, il n'est pas utile de s'embarrasser de telles équations. Cette propriété est la conséquence de l'invariance du sous-groupe des déplacements associé à une liaison mécanique, qui exprime les possibilités de mouvements permis par la liaison. De fait, ces relations ne changent en rien les sources d'hyperstatisme. Pour cette raison, il est recommandé de simplement considérer que si une variable est connue dans un repère, il est possible d'en connaître la valeur dans un autre. Par exemple si  $X_{1-2}^1$  est connue, cela implique que  $X_{1-2}^2$  l'est également.

Jusqu'à présent, les concepts de sources d'hyperstatisme et d'influence sur les différents composants ont été utilisés sans autre explication. Il est bon ici de rappeler que les sources d'hyperstatisme correspondent au nombre de variables inconnues à poser pour être en mesure de résoudre le système d'équations linéaires résultant de l'étude statique. La nature exacte de ces sources est souvent impossible à déterminer, de même qu'inutile.

Il faut cependant connaître comment elles se répercutent sur les différents groupes d'un système mécanique, afin de pouvoir poser les conditions fonctionnelles permettant d'en contrôler les effets. Pour un groupe donné, chaque fois qu'une équation est impossible à résoudre, il existe soit un hyperstatisme de translation ou de moment, selon qu'il s'agisse d'une relation d'efforts ou de moments. En ce qui concerne la détermination des hyperstatismes de moment, les termes induits par les efforts transmissibles ne doivent pas être considérés. La raison étant que ces termes induits ne représentent pas un blocage tangible d'un degré de liberté, causé par une liaison entre deux composants, mais sont la simple conséquence de l'application du théorème des moments. Il faut donc, aussi bien en ce qui a trait aux hyperstatismes de translation que ceux de moment, qu'il y ait au moins deux termes appartenant à deux liaisons différentes, pour avoir un hyperstatisme.

Une fois les équations dérivant de l'équilibre de chacun des groupes analysées, il faut, au moyen d'un bilan global, vérifier que le nombre de sources d'hyperstatisme correspond bien à celui prévu lors de l'étude du degré d'hyperstatisme. À noter qu'il est préférable, plutôt que d'examiner les équations résultant des études statiques de tous les sous-ensembles en même temps, de procéder cas par cas. Ainsi, lorsque le principe fondamental de la statique a été appliqué à l'un des groupes, on étudie aussitôt les équations qui en dérivent. Bien entendu, il est fort probable que l'équilibre des autres composants révèle des informations permettant de déterminer des variables impliquées dans ces équations. De ce fait, il est nécessaire de propager à l'ensemble des groupes, les conclusions obtenues sur un groupe.

### **3.3 Spécification du tolérancement géométrique**

La spécification du tolérancement géométrique sur les composants est réalisée en deux étapes. La première étape consiste à poser les conditions fonctionnelles, imposées par l'existence des sources d'hyperstatismes. Il s'agit ensuite de déterminer le tolérancement

géométrique, pour chacune des pièces, requis pour rencontrer ces conditions fonctionnelles.

### **3.3.1 Proposition des conditions fonctionnelles de position et d'orientation, permettant de contrôler les hyperstatismes**

Les principes de symbolisation des conditions fonctionnelles de position et d'orientation, ainsi que les définitions nécessaires, sont les mêmes que pour le tolérancement géométrique. La seule différence entre ces deux concepts réside dans le fait que les conditions fonctionnelles s'appliquent entre les axes de mouvements des liaisons cinématiques. Le tolérancement géométrique, pour sa part, est indiqué entre des éléments appartenant à une même pièce. Cette distinction oblige à avoir recours à une certaine liberté d'expression des conditions fonctionnelles relativement à la norme, celle-ci n'étant pas faite pour ce type d'utilisation.

Les relations établissant les conditions fonctionnelles à poser en fonction des hyperstatismes présents sur chacun des groupes sont les suivantes: pour contrôler un hyperstatisme de translation il faut imposer une condition fonctionnelle de position; pour un hyperstatisme de moment, une condition fonctionnelle d'orientation. Ainsi, à partir des hyperstatismes trouvés pour chacun des groupes, il s'agit de déterminer les conditions fonctionnelles à poser pour y remédier. Celles-ci sont ensuite indiquées entre les axes de mouvements imposés par les sous-ensembles en liaison avec le groupe concerné. L'orientation du repère groupe servira de guide sur la façon d'indiquer ces conditions fonctionnelles. En ce qui a trait au bâti, c'est la fermeture de la chaîne de position et/ou d'orientation, qui préside la détermination des conditions fonctionnelles à placer.



### **3.3.2 Proposition d'un tolérancement géométrique pour chacune des pièces**

La satisfaction des conditions fonctionnelles, relatives à un groupe donné, ne peut se faire qu'au travers des pièces constituant ce groupe. Les conditions fonctionnelles spécifient la nature du tolérancement géométrique à imposer, tandis que les flux fonctionnels expriment le mode de propagation à travers les pièces. Ainsi, des conditions fonctionnelles d'orientation entraînent des tolérances géométriques d'orientation et des conditions fonctionnelles de mise en position, des tolérances dimensionnelles ou de position. Ce sont des considérations sur les procédés de fabrication et d'inspection qui dicteront le tolérancement géométrique à adopter, parmi les diverses possibilités offertes par la norme.

## **3.4 Exemples**

Les exemples qui suivent (le moteur à explosion deux temps et la pompe à corps déformable), visent à illustrer la méthodologie développée.

### **3.4.1 Exemple 1: Moteur à explosion 2 temps**

Les moteurs à explosion 2 temps ont pour caractéristique principale de rassembler sur un seul tour de vilebrequin au lieu de deux, les quatre phases du cycle à quatre temps, c'est-à-dire l'admission, la compression, la détente et l'échappement. Ils sont utilisés sur de petits équipements: tondeuses, scies à moteur, hors-bord, modèles réduits, etc. La figure 3.4, page 41, montre le dessin d'ensemble d'un tel moteur, adapté ici pour un modèle réduit d'avion. Les deux états fonctionnels possibles de ce mécanisme sont l'arrêt et la marche avant. Cette dernière sera considérée pour l'étude ci-après. Il est à noter que ce type de moteur nécessite un démarrage manuel, pour lancer le cycle et déterminer le sens de fonctionnement. En effet, une position singulière existe lorsque le piston est au point mort haut ou au point mort bas.

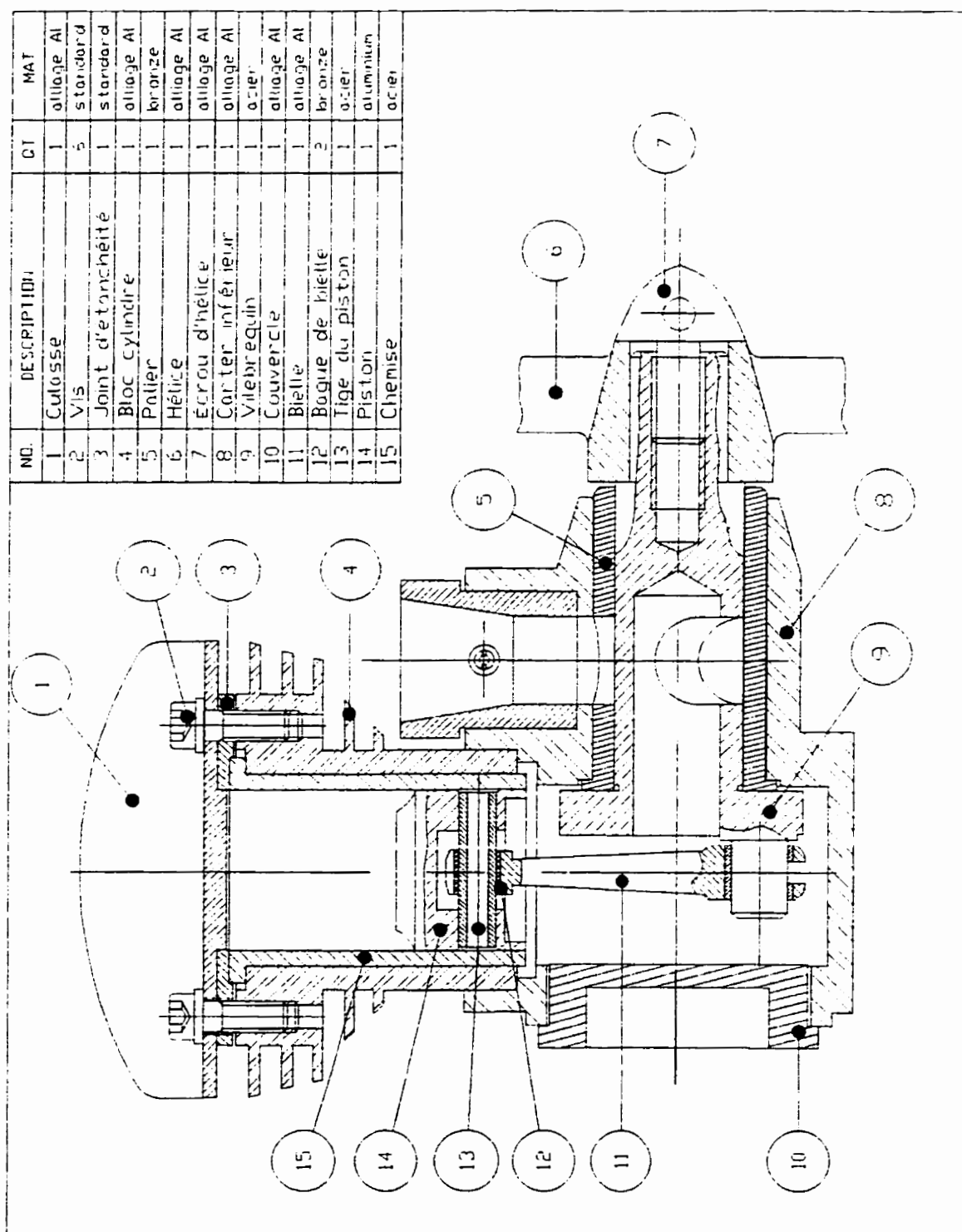


Figure 3.4: Dessin d'ensemble d'un moteur à explosion 2 temps

## **Étape 1: Modélisation du mécanisme**

### ***1.1) Identification des pièces intervenant dans la construction du mécanisme et compréhension de son fonctionnement***

Dans cet exemple, la nomenclature du mécanisme est donnée. Par conséquent, le travail se résume à saisir le fonctionnement du moteur à explosion 2 temps à travers le rôle de ces composants. C'est le piston (14) qui reçoit l'information d'entrée. En effet, en allumant le mélange d'air et d'essence contenu dans le cylindre fermé par le piston, il se produit, par combustion, une augmentation importante de pression. Cette pression s'exerce sur le piston (14) qui se trouve ainsi chassé vers le bas. Une bielle (11) relie le piston (14) au vilebrequin (9). Quand le piston (14) se déplace en translation dans le cylindre, il actionne la bielle (11) qui entraîne le vilebrequin (9) en rotation. Le mécanisme décrit joue exactement le même rôle que le pédalier d'une bicyclette mû par la jambe du cycliste.

### ***1.2) Regroupement des éléments en contact n'entretenant aucun mouvement relatif***

Le fonctionnement du mécanisme étant assimilé, il est maintenant possible de regrouper les éléments en contact, n'entretenant aucun mouvement relatif, afin de les considérer comme une seule entité pour les besoins de l'analyse hyperstatique. Les regroupements possibles sont les suivants:

#### **Regroupement [0]**

- La culasse (1) est fixée sur le bloc cylindre (4) au moyen de six vis (2), lesquelles bloquent tous les degrés de liberté possibles entre ces deux composants, donnant ainsi lieu à une liaison encastrement.

- Afin de prévenir les fuites entre la culasse (1) et la chemise (15), un joint d'étanchéité (3) est utilisé. Ce dernier est serré entre la culasse (1) et la chemise (15) au moyen des six vis précédentes (2) et ne peut donc pas se déplacer par rapport à ces composants.
- La chemise (15) est montée avec un ajustement incertain dans le bloc cylindre (4). L'insertion peut se faire à la main en exerçant une certaine pression (elle peut être retirée de la même façon). Aussi, le haut de cette chemise (15) comporte une collerette qui est serrée entre le bloc cylindre (4) et la culasse (1) par l'entremise du joint d'étanchéité (3). La chemise est donc immobile par rapport à ces composants.
- Le bloc cylindre (4) est à son tour fixé au carter inférieur (8) grâce à quatre vis (non illustrées). Ces deux composants réalisent donc eux aussi une liaison encastrement.
- Le couvercle (10) se visse directement dans le carter inférieur (8) éliminant du fait tous les degrés de liberté possibles.
- Le palier (5) est solidaire du carter inférieur (8), celui-ci étant monté par serrage.

La culasse (1), le bloc cylindre (4), les vis (2), le joint d'étanchéité (3), la chemise (15), le carter inférieur (8), le couvercle (10) et le palier (5) peuvent tous être regroupés et considérés comme une seule entité, puisqu'ils n'entretiennent aucun mouvement relatif les uns par rapport aux autres. Cet ensemble sera dorénavant appelé groupe bâti et sera identifié par le nombre [0].

### Regroupement [1]

- La tige du piston (13) peut, selon le cas, être montée de trois manières différentes: «serrée» dans les portées du piston et libre dans l'alésage du pied de bielle, «serrée» dans la bielle et libre dans le piston, ou libre dans la bielle et le piston. La présence d'une bague en bronze (12) s'interposant entre le métal de la bielle (11) et celui de la tige du piston (13) laisse supposer que celle-ci est montée libre dans le pied de bielle.

De ce fait, il est possible de considérer la tige du piston (13) et le piston (14) comme une seule entité. Cet ensemble sera nommé piston et identifié par le nombre [1].

### Regroupement [2]

- Les deux bagues de bielle (12) sont montées par serrage sur cette dernière. Il n'existe donc aucun mouvement possible entre ces éléments. Il est donc possible de les considérer comme une seule entité, bielle, laquelle sera identifiée par le nombre [2].

### Regroupement [3]

- L'hélice (6) est maintenue immobile par rapport au vilebrequin (9) au moyen d'un écrou d'hélice (7), lequel est vissé à même le vilebrequin (9). Ces trois éléments n'entretenant aucun mouvement relatif, il est possible de les regrouper. Cet ensemble sera nommé vilebrequin et identifié par le nombre [3].

Compte tenu de ces regroupements, le graphe de structure minimal peut être réalisé. Ce dernier est illustré à la figure 3.5. Il est à noter que les efforts extérieurs agissant sur les composants sont également indiqués sur ce dessin. Ces efforts, au nombre de trois, sont les suivants: la force de pression ( $F_p$ ) agissant sur le piston et due à la combustion des gaz dans le cylindre, le couple ( $C$ ) et la force axiale ( $F_a$ ) agissant sur le vilebrequin et causés par la résistance de l'air sur l'hélice lors du vol du modèle réduit d'avion.

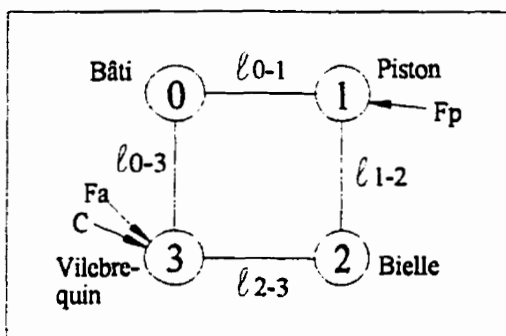


Figure 3.5: Graphe du moteur

### ***1.3) Détermination du modèle de liaison cinématique correspondant à chacune des liaisons mécaniques dans le mécanisme***

Il faut maintenant déterminer le modèle de liaison cinématique reliant chaque groupe du graphe des liaisons et correspondant à chacune des liaisons mécaniques présentes dans le système étudié. Les liaisons cinématiques possibles ainsi que leur représentation schématique sont présentées dans les tableaux 2.1 et 2.2 des pages respectives 11 et 15.

#### ***Liaison $\ell_{0,1}$***

Le groupe piston [1] et le groupe bâti [0] forment une liaison pivot glissant, car le groupe piston [1] peut tourner et glisser par rapport au groupe bâti [0], le long d'une droite commune: l'axe de mouvement du piston (14) (abstraction faite des autres composants).

#### ***Liaison $\ell_{1,2}$***

Les groupes piston [1] et bielle [2] réalisent également une liaison pivot glissant puisqu'ils peuvent tourner et glisser l'un par rapport à l'autre le long d'une droite commune, perpendiculaire à l'axe de mouvement du piston (14).

#### ***Liaison $\ell_{2,3}$***

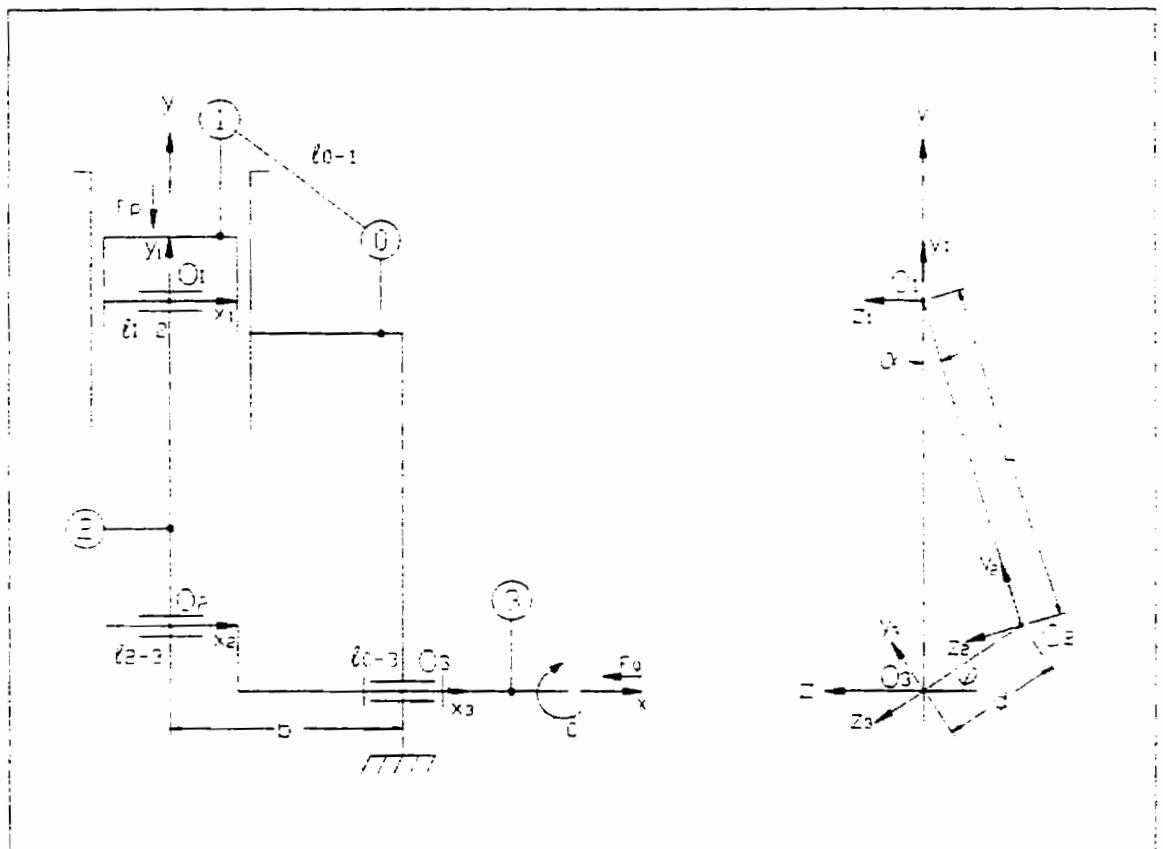
Une liaison pivot glissant existe aussi entre les groupes bielle [2] et vilebrequin [3], le long d'une droite commune perpendiculaire à l'axe de mouvement du piston (14), ou parallèle à l'axe de mouvement du vilebrequin (9).

#### ***Liaison $\ell_{0,3}$***

Le groupe vilebrequin [3] est en rotation par rapport au groupe bâti [0] autour d'une droite commune liée au bâti [0]. De plus, ce dernier n'a aucun mouvement relatif de

translation le long de cette droite par rapport au groupe bâti [0]. Ces deux ensembles réalisent donc une liaison pivot.

Ayant déterminé la nature des liaisons reliant chacun des groupes, il est dès lors possible de dessiner le schéma cinématique du mécanisme. Celui-ci est illustré à la figure 3.6, pour une position du mécanisme la plus générale qui soit, c'est-à-dire  $\alpha \neq 0$  et  $\varphi \neq 0, \pi/2, \pi, -\pi/2$ , ces positions amenant une singularité et/ou une configuration géométrique particulière.



**Figure 3.6:** Schéma cinématique du moteur à explosion 2 temps

**1.4) Identification des torseurs statiques correspondant à chacune des liaisons dans un repère local propre à la liaison**

Les torseurs statiques, tels qu'exprimés dans un repère local propre à la liaison, sont donnés ci-après. La détermination des référentiels résulte de choix arbitraires (orientation des axes), compatibles avec les conditions relatives à leur construction (tableau 2.2, page #15). Ces référentiels sont illustrés à la figure 3.6.

$\ell_{0-1}$  : Liaison pivot glissant d'axe  $y_1$ , d'origine  $O_1$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{0-1}^1 & L_{0-1}^1 \\ 0 & 0 \\ Z_{0-1}^1 & N_{0-1}^1 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (3.6)$$

$\ell_{1-2}$  : Liaison pivot glissant d'axe  $x_1$ , d'origine  $O_1$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{1-2}^1 & M_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 & N_{1-2}^1 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (3.7)$$

$\ell_{2-3}$  : Liaison pivot glissant d'axe  $x_2$ , d'origine  $O_2$

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{\ell_{2-3}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{2-3}^2 & M_{2-3}^2 \\ Z_{2-3}^2 & N_{2-3}^2 \end{array} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} \quad (3.8)$$

$\ell_{0-3}$  : Liaison pivot d'axe  $x_3$ , d'origine  $O_3$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 3)}^{\ell_{0-3}} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{0-3}^3 & 0 \\ Y_{0-3}^3 & M_{0-3}^3 \\ Z_{0-3}^3 & N_{0-3}^3 \end{array} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3} \quad (3.9)$$



## Étape 2: Analyse hyperstatique

### 2.1) Analyse du degré d'hyperstatisme

D'après le graphe des liaisons réalisé précédemment, le moteur à explosion 2 temps comprend, avec le groupe bâti [0], quatre sous-ensembles [1], [2] et [3]. L'application du principe fondamental de la statique à chacun d'eux, excepté le bâti [0], conduit à:

$$6(4 - 1) = 18 \text{ équations statiques (Es)} \quad (3.10)$$

À partir des torseurs statiques correspondant à chacune des liaisons, il est possible d'identifier:

$$4 + 4 + 4 + 5 = 17 \text{ inconnues statiques (Is)} \quad (3.11)$$

Le degré d'hyperstatisme se calcule alors à l'aide de la formule:

$$m_s = m - m_c \quad (3.12)$$

$$\text{avec } m = Es - Is = 18 - 17 = 1 \quad (3.13)$$

$$\text{et } m_c = m_c^{\text{int}} + m_c^{\text{ext}} \quad (3.14)$$

Sachant que le mécanisme comporte une mobilité cinématique externe soit le mouvement de translation du piston suivant l'axe des  $y_1$  dû à l'explosion des gaz, de même qu'une mobilité cinématique interne, le mouvement de translation de la bielle montée flottante suivant l'axe des  $x_2$ , le nombre de mobilité cinématique total est donc égal à:

$$m_c = m_c^{\text{int}} + m_c^{\text{ext}} = 1 + 1 = 2 \quad (3.15)$$

Ce qui permet de déterminer le nombre de sources d'hyperstatisme, lequel correspond au nombre d'inconnues principales du système d'équations résultant de l'application du principe fondamental de la statique aux pièces ou sous-ensembles du mécanisme:

$$m_s = m - m_c = 1 - 2 = -1 \quad (3.16)$$

$\Rightarrow$  1 degré d'hyperstatisme

À noter que, comme il y a une mobilité cinématique externe, une des forces agissant sur le système est inconnue. Comme la force de pression ( $F_p$ ) agissant sur le piston et le couple ( $C$ ) agissant sur le vilebrequin ne peuvent être connus en même temps, sans risque d'entraîner une incohérence mathématique, il s'agit nécessairement d'un des deux. Le couple agissant sur le vilebrequin ( $C$ ), causé par la résistance de l'air sur l'hélice, est l'inconnue la plus probable.

## 2.2) Analyse statique

Afin d'identifier les répercussions du degré d'hyperstatisme sur les différents sous-ensembles, les équations d'équilibre des groupes [1], [2] et [3] sont établies.

### 2.2.1) Équilibre du groupe piston [1]

#### a - Choix du repère groupe

Le graphe des liaisons du moteur à explosion 2 temps (figure 3.5) montre que le piston [1] est contraint par les liaisons  $\ell_{0-1}$  et  $\ell_{1-2}$ , et est soumis au torseur d'efforts extérieurs  $\left\{ \tau_{(ext \rightarrow 1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1}$ . Le repère local associé à ces deux liaisons étant le même (section 1.4), il correspond directement au repère piston, soit  $x_1 y_1 z_1$  d'origine  $O_1$ .

#### b - Expression des torseurs dans le repère groupe

##### Liaison $\ell_{0-1}$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{0-1}^I & L_{0-1}^I \\ 0 & 0 \\ Z_{0-1}^I & N_{0-1}^I \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (3.17)$$

### Liaison $\ell_{1-2}$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{1-2}^1 & M_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 & N_{1-2}^1 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (3.18)$$

### Torseur des efforts extérieurs agissant sur le piston [1]

$$\left\{ \tau_{(ext \rightarrow 1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -F_p & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (3.19)$$

### ***c - Équilibre statique***

Le principe fondamental de la statique appliqué à ce sous-ensemble s'écrit:

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(ext \rightarrow 1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \{ \bar{0} \} \quad (3.20)$$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} - \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(ext \rightarrow 1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \{ \bar{0} \} \quad (3.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} X_{0-1}^1 & L_{0-1}^1 \\ 0 & 0 \\ Z_{0-1}^1 & N_{0-1}^1 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} - \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{1-2}^1 & M_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 & N_{1-2}^1 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -F_p & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \{ \bar{0} \} \quad (3.22)$$

Soit au bilan:

$$\begin{array}{ll} X_{0-1}^1 = 0 & L_{0-1}^1 = 0 \\ -Y_{1-2}^1 - F_p = 0 & -M_{1-2}^1 = 0 \\ Z_{0-1}^1 - Z_{1-2}^1 = 0 & N_{0-1}^1 - N_{1-2}^1 = 0 \end{array} \quad (3.23)$$

### ***d - Conclusion***

En supposant la force de pression agissant sur le piston ( $F_p$ ) connue, il est possible de constater, à partir du bilan de l'équilibre du groupe piston, un hyperstatisme de translation suivant l'axe des  $z$  ( $Z_{0-1}^1$  ou  $Z_{1-2}^1$ ), ainsi qu'un hyperstatisme de moment suivant ce même

axe ( $N_{0-1}^1$  ou  $N_{1-2}^1$ ). En effet, la translation et la rotation sont bloquées deux fois suivant cet axe.

### 2.2.2) Équilibre du groupe bielle [2]

#### a - Choix du repère groupe

Le graphe des liaisons (figure 3.5) révèle que le groupe bielle [2] est contraint par les liaisons  $\ell_{1-2}$  et  $\ell_{2-3}$ . La construction de son repère groupe montre qu'il est possible d'orienter les axes des référentiels locaux associés à ces liaisons ( $x_2y_2z_2$  et  $x_3y_3z_3$ ) de la même façon, ainsi que selon le paramètre de mise en position relative des éléments de bases de ces liaisons, c'est-à-dire suivant la perpendiculaire commune à leur axe de rotation ( $z_2$ ). Le repère commun est  $x_2y_2z_2$ . En ce qui concerne l'origine du repère groupe, il faut choisir celle de la liaison la plus contrainte. Comme il s'agit ici de deux liaisons pivot glissant, le choix de l'une ou l'autre n'a pas d'importance. Le point  $O_2$  est arbitrairement choisi et le repère groupe bielle est  $O_2, x_2y_2z_2$ .

#### b - Expression des torseurs dans le repère groupe

##### Liaison $\ell_{2-3}$

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{\ell_{2-3}} \right\}_{O_2, x_2y_2z_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{2-3}^2 & M_{2-3}^2 \\ Z_{2-3}^2 & N_{2-3}^2 \end{array} \right\}_{O_2, x_2y_2z_2} \quad (3.24)$$

##### Liaison $\ell_{1-2}$

Il faut ici appliquer le théorème des moments (équation 2.1) afin d'exprimer le torseur associé à cette liaison au point  $O_2$ .

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_2y_2z_2} \Rightarrow \bar{R}_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} = \begin{array}{c} 0 \\ Y_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 \end{array} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{M}_{(O_2, I \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} &= \vec{M}_{(O_1, I \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} + \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \wedge \vec{O_1 O_2} \\
&= \begin{vmatrix} 0 \\ M_{1-2}^1 \\ N_{1-2}^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} LZ_{1-2}^1 \\ M_{1-2}^1 \\ N_{1-2}^1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

### c - Équilibre statique

Le principe fondamental de la statique appliqué à ce groupe s'écrit:

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} + \left\{ \tau_{(3 \rightarrow 2)}^{\ell_{2-3}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = \{\vec{0}\} \quad (3.26)$$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} - \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{\ell_{2-3}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = \{\vec{0}\} \quad (3.27)$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} LZ_{1-2}^1 \\ M_{1-2}^1 \\ N_{1-2}^1 \end{vmatrix} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} - \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{2-3}^2 \\ Z_{2-3}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ M_{2-3}^2 \\ N_{2-3}^2 \end{vmatrix} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = \{\vec{0}\} \quad (3.28)$$

Soit au bilan:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 & LZ_{1-2}^1 &= 0 \\
Y_{1-2}^1 - Y_{2-3}^2 &= 0 & M_{1-2}^1 - M_{2-3}^2 &= 0 \\
Z_{1-2}^1 - Z_{2-3}^2 &= 0 & N_{1-2}^1 - N_{2-3}^2 &= 0
\end{aligned} \quad (3.29)$$

### d - Conclusion

D'après ces équations, il est possible de constater un hyperstatisme de translation suivant l'axe des y ( $Y_{1-2}^1$  ou  $Y_{2-3}^2$ ), de même que des hyperstatismes de moment suivant les axes y et z ( $M_{1-2}^1$  ou  $M_{2-3}^2$  et  $N_{1-2}^1$  ou  $N_{2-3}^2$ ). Toutefois, l'équilibre du groupe piston [1] ayant permis de déterminer  $Y_{1-2}^1$  et  $M_{1-2}^1$ , et puisqu'une variable connue dans un

référentiel est présumée connue dans les autres, il en résulte que seul l'hyperstatisme de moment autour de  $z$  demeure. De la même façon, il est possible de retourner à l'équilibre du groupe piston [1] et d'éliminer l'hyperstatisme de translation suivant l'axe des  $z$ , l'équilibre du groupe bielle [2] ayant permis de trouver  $Z_{1-2}^1$ .

### 2.2.3) Équilibre du groupe vilebrequin [3]

#### a - Choix du repère groupe

Le groupe vilebrequin [3] est contraint par les liaisons  $\ell_{2-3}$  et  $\ell_{0-3}$  et est soumis au torseur des efforts extérieurs  $\left\{ \tau_{(ext \rightarrow 3)} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3}$  (voir figure 3.5). Son équilibre est réalisé dans le référentiel  $x_3 y_3 z_3$  d'origine  $O_3$ . En effet, la démarche pour établir le repère groupe vilebrequin montre qu'il est possible d'orienter les axes des repères locaux associés à ces liaisons de la même façon, ainsi que selon le paramètre de mise en position relative des éléments de bases de celles-ci, c'est-à-dire suivant la perpendiculaire commune à leur axe de rotation ( $z_3$ ). En ce qui concerne l'origine du repère groupe, il faut choisir celle de la liaison la plus contrainte, soit  $O_3$ .

#### b - Expression des torseurs dans le repère groupe

##### Liaison $\ell_{0-3}$

$$\left\{ \tau'_{(0 \rightarrow 3)} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_{0-3}^3 \\ Y_{0-3}^3 \\ Z_{0-3}^3 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ M_{0-3}^3 \\ N_{0-3}^3 \end{matrix} \end{array} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3} \quad (3.30)$$

##### Liaison $\ell_{2-3}$

Il faut ici appliquer le théorème des moments (équation 2.1) afin d'exprimer le torseur associé à cette liaison au point  $O_3$ .

$$\begin{aligned}
 \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} &\Rightarrow \bar{R}_{(2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} = \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{2-3}^2 \\ Z_{2-3}^2 \end{vmatrix} \\
 &\Rightarrow \bar{M}_{(O_1, 2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} = \bar{M}_{(O_2, 2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} + \bar{R}_{(2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} \wedge \overrightarrow{O_2 O_3} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 \\ M_{2-3}^2 \\ N_{2-3}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{2-3}^2 \\ Z_{2-3}^2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} b \\ 0 \\ d \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} dY_{2-3}^3 \\ M_{2-3}^2 + bZ_{2-3}^3 \\ N_{2-3}^2 - bY_{2-3}^3 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Torseur des efforts extérieurs agissant sur le vilebrequin [3]

$$\left\{ \tau_{(ext \rightarrow 3)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \begin{vmatrix} -Fa & -C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \tag{3.32}$$

### c - Équilibre statique

Le principe fondamental de la statique pour ce sous-ensemble s'écrit:

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(0 \rightarrow 3)}^{e_{0-3}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(ext \rightarrow 3)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \{ \bar{0} \} \tag{3.33}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{2-3}^2 \\ Z_{2-3}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dY_{2-3}^3 \\ M_{2-3}^2 + bZ_{2-3}^3 \\ N_{2-3}^2 - bY_{2-3}^3 \end{vmatrix}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \begin{vmatrix} X_{0-3}^3 \\ Y_{0-3}^3 \\ Z_{0-3}^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ M_{0-3}^3 \\ N_{0-3}^3 \end{vmatrix}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \begin{vmatrix} -Fa & -C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \{ \bar{0} \} \tag{3.34}$$

Soit au bilan:

$$\begin{aligned}
 X_{0-3}^3 - Fa &= 0 & dY_{2-3}^3 - C &= 0 \\
 Y_{2-3}^2 + Y_{0-3}^3 &= 0 & M_{2-3}^2 + bZ_{2-3}^3 + M_{0-3}^3 &= 0 \\
 Z_{2-3}^2 + Z_{0-3}^3 &= 0 & N_{2-3}^2 - bY_{2-3}^3 + N_{0-3}^3 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

### *d - Conclusion*

La force axiale ( $F_a$ ) agissant sur le vilebrequin étant supposée connue, les résultats du bilan permettent d'observer des hyperstatismes de translation suivant les axes  $y$  et  $z$ , ainsi que des hyperstatismes de moment suivant ces mêmes axes. Toutefois, à partir des conclusions de l'étude statique des autres sous-ensembles, seul l'hyperstatisme de moment autour de  $z$  persiste.

### *2.2.4) Bilan global*

Le bilan global, présenté ci-après, permet de vérifier que, comme prévu par l'analyse du degré d'hyperstatisme, il y a bien une seule source d'hyperstatisme. En effet, il suffit d'imposer une des quatre variables suivantes,  $N_{0-1}$ ,  $N_{1-2}$ ,  $N_{2-3}$  ou  $N_{0-3}$ , pour être à même de déterminer toutes les autres inconnues. Cette source d'hyperstatisme se traduit par un hyperstatisme de moment autour de  $z$  pour les groupes piston [1], bielle [2], et vilebrequin [3].

#### Équilibre du piston [1]

$$\begin{aligned} X_{0-1}^1 &= 0 \\ -Y_{1-2}^1 - F_p &= 0 \\ Z_{0-1}^1 - Z_{1-2}^1 &= 0 \end{aligned}$$

(3.23)

$$\begin{aligned} L_{0-1}^1 &= 0 \\ -M_{1-2}^1 &= 0 \\ N_{0-1}^1 - N_{1-2}^1 &= 0 \end{aligned}$$

#### Équilibre de la bielle[2]

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ Y_{1-2}^1 - Y_{2-3}^2 &= 0 \\ Z_{1-2}^1 - Z_{2-3}^2 &= 0 \end{aligned}$$

(3.29)

$$\begin{aligned} LZ_{1-2}^1 &= 0 \\ M_{1-2}^1 - M_{2-3}^2 &= 0 \\ N_{1-2}^1 - N_{2-3}^2 &= 0 \end{aligned}$$

#### Équilibre du vilebrequin [3]

$$\begin{aligned} X_{0-3}^3 - F_a &= 0 \\ Y_{2-3}^2 + Y_{0-3}^3 &= 0 \\ Z_{2-3}^2 + Z_{0-3}^3 &= 0 \end{aligned}$$

(3.35)

$$\begin{aligned} dY_{2-3}^2 - C &= 0 \\ M_{2-3}^2 + bZ_{2-3}^2 + M_{0-3}^3 &= 0 \\ N_{2-3}^2 - bY_{2-3}^2 + N_{0-3}^3 &= 0 \end{aligned}$$



### **Étape 3: Spécification du tolérancement géométrique**

#### ***3.1) Proposition des conditions fonctionnelles de position et d'orientation permettant de contrôler les hyperstatismes***

À partir de l'analyse statique effectuée précédemment, les conditions fonctionnelles de position et d'orientation, nécessaires pour contrôler les effets de la source d'hyperstatisme, sont déterminées. Celles-ci sont illustrées à la figure 3.7.

##### ***3.1.1) Conditions fonctionnelles relatives au groupe piston [1]***

De façon à contrôler la compatibilité d'orientation autour de l'axe des  $z$ , entre les axes de mouvement des liaisons cinématiques contraignant le groupe piston [1], il faut poser une tolérance de perpendicularité ( $T_1$ , figure 3.7) entre l'axe du groupe bâti [0] et l'axe du groupe bielle [2], en relation avec le groupe piston [1].

##### ***3.1.2) Conditions fonctionnelles relatives au groupe bielle [2]***

Pour pallier à l'hyperstatisme de moment autour de  $z$  concernant ce sous-ensemble, il faut ajouter une tolérance de parallélisme ( $T_2$ , figure 3.7) entre l'axe du groupe piston [1] et l'axe du groupe vilebrequin [3], en relation avec le groupe bielle [2].

##### ***3.1.3) Conditions fonctionnelles relatives au groupe vilebrequin [3]***

Dans le cas du groupe vilebrequin [3], il faut mettre une tolérance de parallélisme ( $T_3$ , figure 3.7) entre l'axe du groupe bielle [2] et l'axe du groupe bâti [0], tous deux en relation avec le vilebrequin [3]. Ceci, dans le but de contrôler l'hyperstatisme de moment présent autour de  $z$ .

### 3.1.4) Conditions fonctionnelles relatives au groupe bâti [0]

La fermeture de la chaîne de position sur le bâti [0] implique d'imposer une tolérance de perpendicularité ( $T_4$ , figure 3.7) entre l'axe du vilebrequin [3] en relation avec le bâti [0] et l'axe du piston [1] également en relation avec le bâti [0].

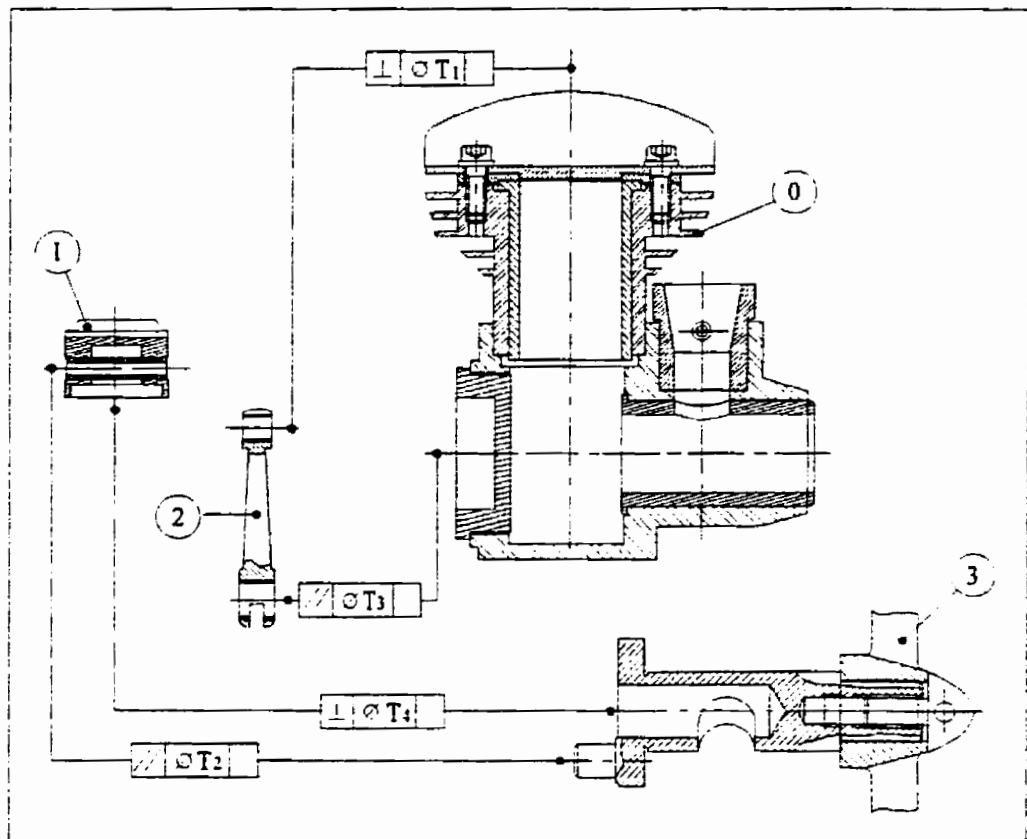


Figure 3.7: Conditions fonctionnelles relatives au moteur

### 3.2) Proposition du tolérancement géométrique, pour chacune des pièces du système mécanique

Les conditions fonctionnelles relatives à chacun des groupes se propagent à travers les pièces constituant le groupe en question, au moyen des flux fonctionnels. Dans ce qui suit, un tolérancement géométrique possible, pour chacun des groupes, est donné.

### **3.2.1) Tolérancement des pièces appartenant au groupe bâti [0]**

Relativement au groupe bâti [0], une condition fonctionnelle de perpendicularité ( $T_4$ ), entre l'axe du vilebrequin [3] en relation avec le bâti [0] et l'axe du piston [1] également en relation avec le bâti [0], a été posée. Cette condition fonctionnelle se traduit, sur le groupe boîtier [0], par un contrôle de la perpendicularité de l'axe de la chemise (15) par rapport à l'axe du palier (5). Pour y parvenir, il est nécessaire de poser:

- une tolérance géométrique de concentricité, de l'axe de l'alésage de la chemise par rapport à l'axe de la chemise (15). Ceci a pour effet d'assurer la propagation du contrôle de perpendicularité vers le bloc cylindre (4);
- une tolérance géométrique de concentricité, de l'axe de l'alésage du bloc cylindre par rapport à l'axe du bloc cylindre (4). Ceci a pour effet d'assurer la propagation du contrôle de perpendicularité vers le carter inférieur (8);
- une tolérance géométrique de perpendicularité, entre les axes des deux alésages du carter inférieur (celui en relation avec le bloc cylindre (4) et celui en relation avec le palier (5)). Ceci a pour effet d'assurer la propagation du contrôle de perpendicularité vers le palier (5);
- une tolérance géométrique de concentricité, de l'axe de l'alésage du palier par rapport à l'axe du palier (5), bouclant ainsi le parcours entre l'axe de la chemise (15) et celui du palier (5).

Le tolérancement de chacune des pièces appartenant au groupe bâti [0] est illustré à la figure 3.8. À noter que les pièces à travers lesquelles le flux fonctionnel ne se propage pas ne sont pas dessinées (couvercle (10), culasse (1), vis (2) et joint d'étanchéité (3)).

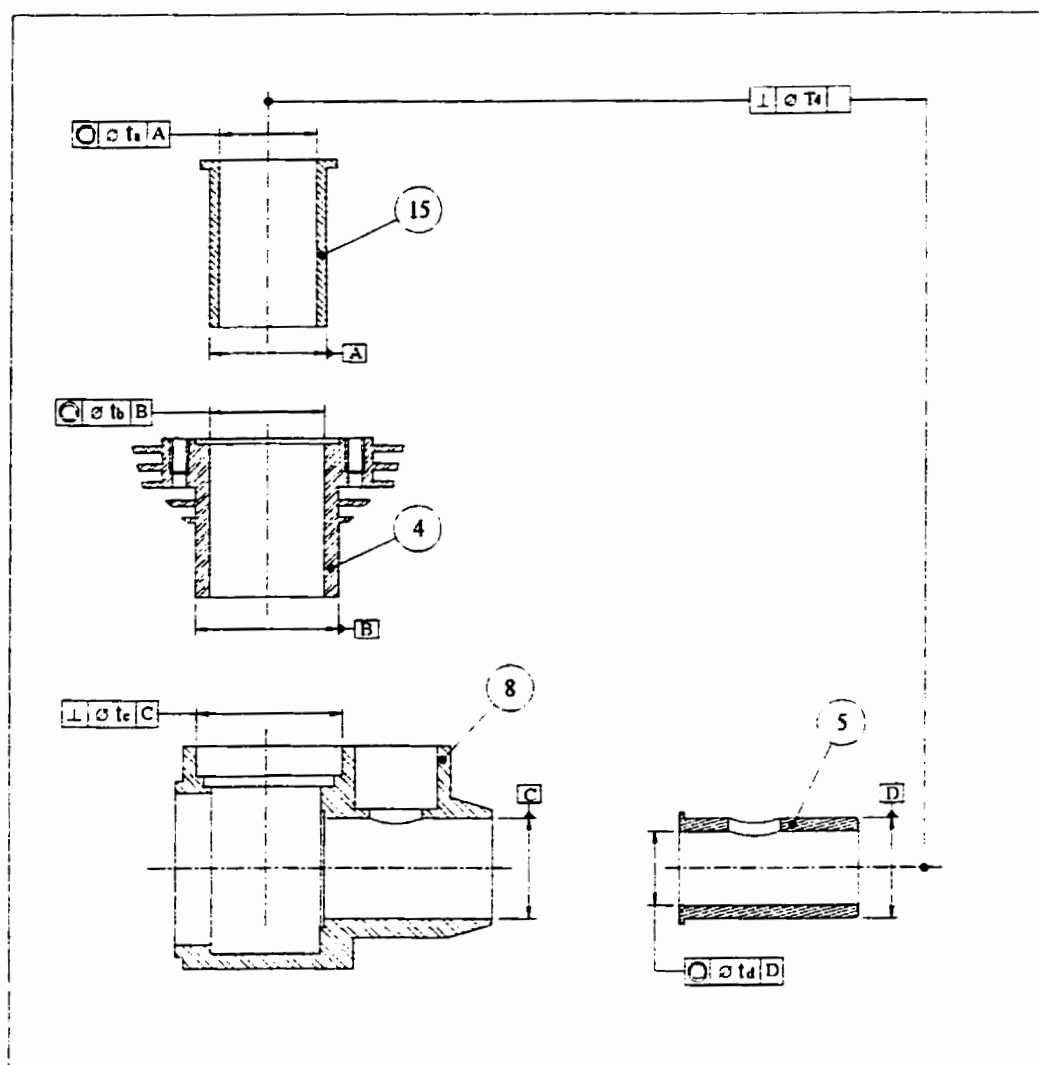


Figure 3.8: Tolérancement du groupe bâti [0]

### 3.2.2) Tolérancement des pièces appartenant au groupe piston [1]

Pour atténuer l'effet de la source d'hyperstatisme, une condition fonctionnelle de perpendicularité ( $T_1$ ), entre l'axe du groupe bâti [0] et l'axe de la tête de bielle [2], en relation avec le groupe piston [1], a été fixée. Cette dernière se traduit, sur le groupe piston [1], par un contrôle de la perpendicularité entre l'axe de la tige du piston (13) et l'axe du piston (14) proprement dit. Pour rencontrer cet objectif, il est nécessaire d'imposer le tolérancement géométrique suivant (voir figure 3.9):

- une tolérance géométrique de perpendicularité, entre l'axe de l'alésage du piston, servant à recevoir la tige de piston, et l'axe du piston (14) lui-même. Ceci a pour effet d'assurer la propagation du contrôle de perpendicularité vers la tige de piston (13);
- une tolérance géométrique de rectitude de l'axe de la tige du piston, bouclant ainsi le parcours entre l'axe du piston (14) et l'axe de la tige de piston (13).

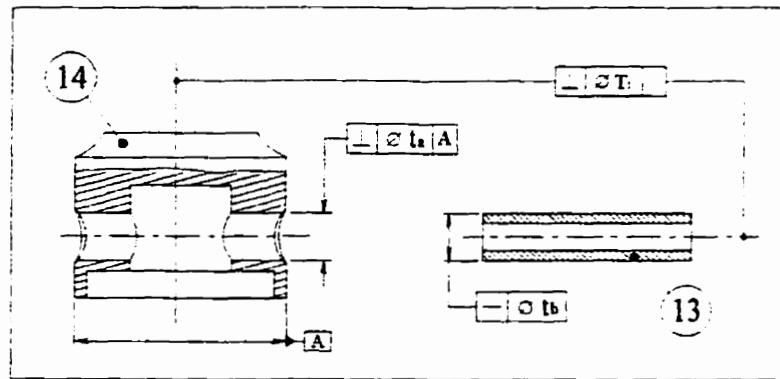


Figure 3.9: Tolérancement des pièces du groupe piston [1]

### 3.2.3) Tolérancement des pièces appartenant au groupe bielle [2]

De façon à contrôler la compatibilité d'orientation autour de  $z$  du groupe bielle [2], une condition fonctionnelle de parallélisme ( $T_2$ ) a été posée entre l'axe du piston [1] et l'axe du vilebrequin [3], en relation avec le groupe bielle [2]. Cette condition fonctionnelle se traduit par un contrôle du parallélisme des axes des bagues de bielle (12), l'un par rapport à l'autre. La propagation du flux fonctionnel, à travers les pièces appartenant à ce groupe, est réalisée par l'adjonction des tolérances géométriques suivantes (voir figure 3.10):

- une tolérance géométrique de concentricité entre l'axe de l'alésage de la bague et l'axe de la bague (12), pour chacune des bagues. Ceci a pour effet d'assurer la propagation du contrôle de parallélisme vers la bielle (11);
- une tolérance géométrique de parallélisme entre les axes des deux alésages de la bielle (11).

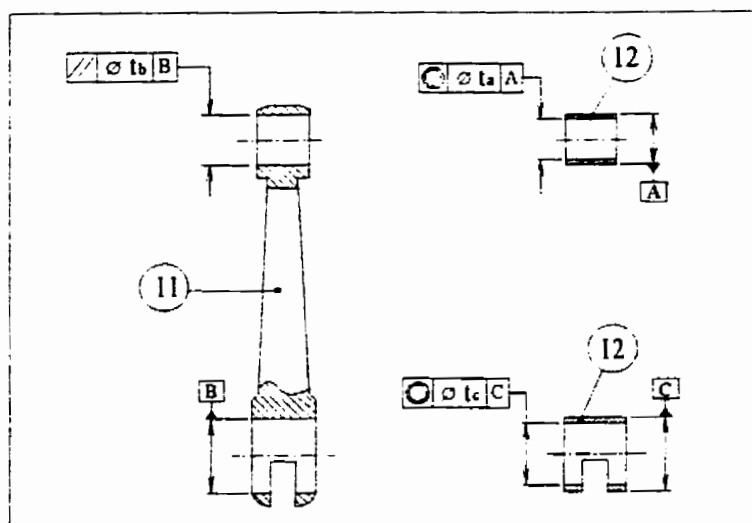


Figure 3.10: Tolérancement des pièces du groupe bielle [2]

#### 3.2.4) Tolérancement des pièces appartenant au groupe vilebrequin [3]

Finalement, la condition fonctionnelle relative au groupe vilebrequin [3] implique une tolérance de parallélisme de l'axe du maneton par rapport à l'axe du vilebrequin (9). De nouveau, les pièces non affectées par le flux fonctionnel, soit l'hélice (6) et l'écrou d'hélice (7), ne sont pas illustrées sur la figure 3.11.

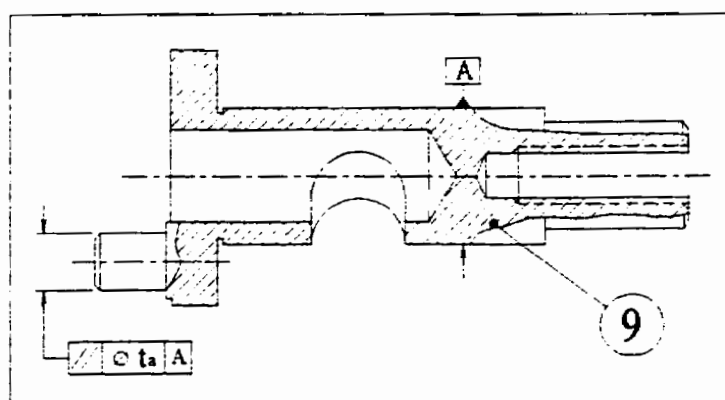


Figure 3.11: Tolérancement des pièces du groupe vilebrequin [3]

### 3.4.2 Exemple 2: Pompe à corps déformable

La figure 3.12 montre le dessin d'ensemble d'une pompe à corps déformable utilisée pour les transfusions sanguines. Cette pompe a pour caractéristique principale de faire intervenir une pièce déformable, sur laquelle une succession de chambres mobiles assure le transport du fluide.

Ce système mécanique peut être en fonction ou à l'arrêt. Dans ce premier cas, on constate, d'après son dessin d'ensemble, deux états structurels possibles, soit:

- 1) tel que représenté sur le dessin, c'est-à-dire deux galets sur la bande d'amortissement et un sur le tuyau déformable;
- 2) deux galets sur le tuyau déformable et un seul sur la bande d'amortissement.

En fonctionnement, ces deux états se succèdent de façon périodique. Un tel système étant en général équilibré, le choix de l'un ou de l'autre, pour réaliser l'étude, importe peu. Le premier cas sera ici considéré.

#### Étape 1: Modélisation du mécanisme

##### ***1.1) Identification des pièces intervenant dans la construction du mécanisme et compréhension de son fonctionnement***

Comme dans l'exemple précédent, la nomenclature du mécanisme est donnée. De nouveau le travail se résume à saisir le fonctionnement de la pompe à travers le rôle de ses composants. Le corps de la pompe est un tuyau de caoutchouc (2) particulièrement déformable puisqu'il peut s'aplatir complètement. Des coussinets (1) sont insérés à chacune des extrémités de ce tuyau flexible (2). Des collets de serrage (19) viennent coincer le tuyau (2) sur ces coussinets (1), empêchant ainsi tout déplacement du tuyau (2)

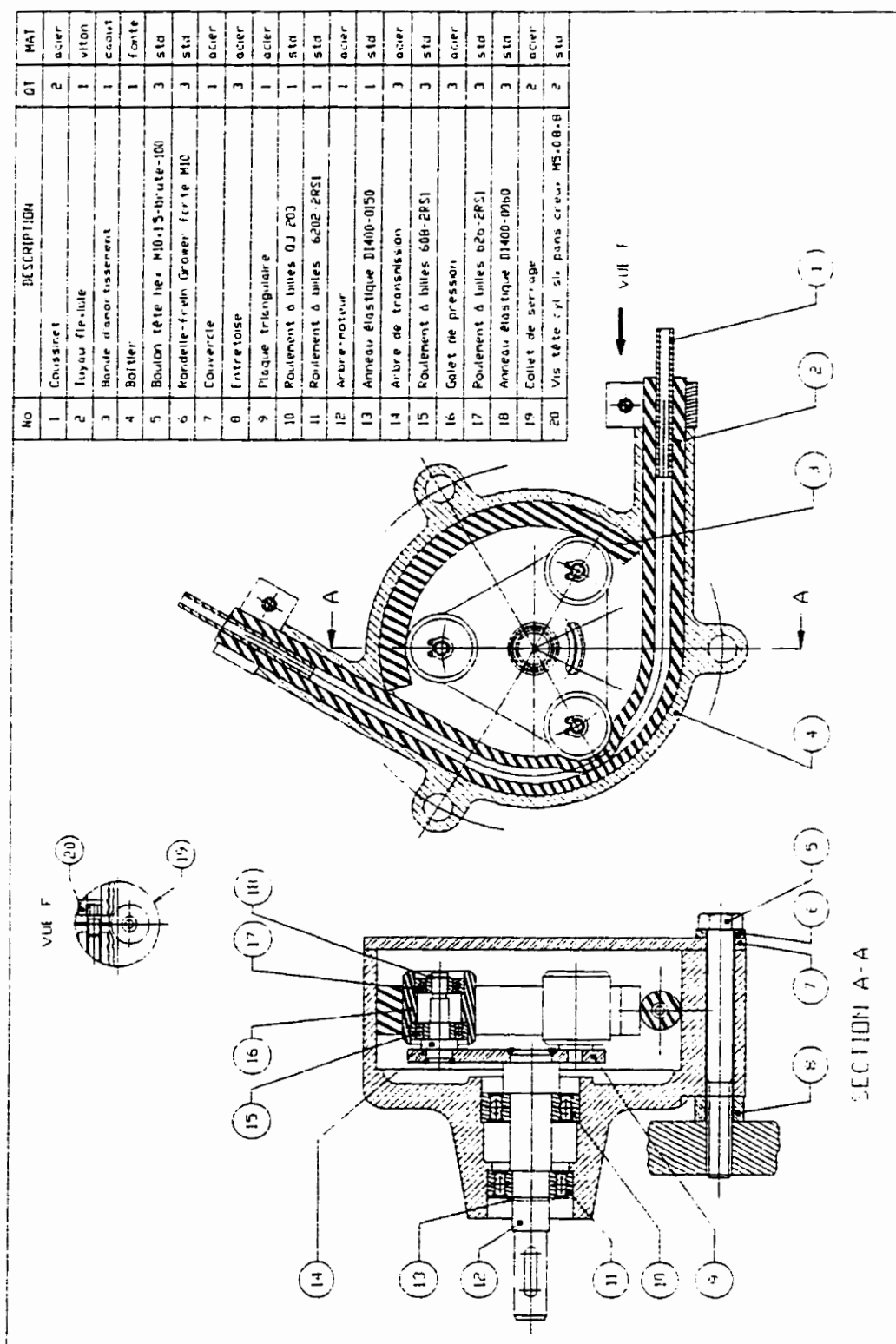


Figure 3.12: Dessin d'ensemble d'une pompe à corps déformable



dans le boîtier (4). Un rotor, entraîné par le moteur, se compose essentiellement de trois galets de pression (16) (libres en rotation) fixés sur une plaque triangulaire (9), elle-même soudée sur l'arbre moteur (12). Dans leur rotation, les galets (16) attaquent successivement le tuyau (2) qu'ils écrasent. Le liquide se trouve aspiré à l'extrémité attaquée dont le volume croît. À l'extrémité opposée, le volume décroît et le liquide est expulsé. Pendant un court instant, deux galets isolent la partie centrale du tube permettant le transfert du liquide de l'entrée vers la sortie. C'est alors que se produit le passage de cette partie de la position aspiration à la position refoulement. À l'opposé du tuyau de caoutchouc (2) se trouve une bande d'amortissement (3) destinée à régulariser le mouvement du rotor et à équilibrer les efforts qui lui sont appliqués.

### ***1.2) Regroupement des éléments en contact n'entretenant aucun mouvement relatif***

Le fonctionnement du mécanisme étant assimilé, il est maintenant possible de regrouper les éléments en contact n'entretenant aucun mouvement relatif et de les considérer comme une seule entité. Les regroupements possibles sont les suivants:

#### **Regroupement [0]**

- Les collets de serrage (19), qui sont en fait un prolongement du boîtier (4), viennent coincer le tuyau flexible (2) sur les coussinets (1). Les coussinets (1), les collets de serrage (19) et le boîtier (4) n'ont aucun degré de liberté les uns par rapport aux autres.
- La bande d'amortissement (3) est collée sur le boîtier (4). Aucun déplacement relatif n'est donc possible entre ces deux constituants.
- Chacun des boulons (5) passe à travers une série de composants soit une rondelle frein (6), le couvercle (7) et une entretoise (8), pour finalement venir en prise dans une pièce sur laquelle la pompe est fixée. Tous ces composants sont bloqués aussi bien en rotation qu'en translation. Ils réalisent donc une liaison encastrement.

Le boîtier (4), les collets de serrage (19), les coussinets (1), la bande d'amortissement (3), les boulons (5), les rondelles frein (6), le couvercle (7) et les entretoises (8) peuvent tous être regroupés et considérés comme une seule entité, puisqu'ils n'entretiennent aucun mouvement relatif les uns par rapport aux autres. Cet ensemble sera dorénavant appelé groupe boîtier et sera identifié par le chiffre [0].

### Regroupement [1]

- L'arbre moteur (12) et les trois arbres de transmission (14) assemblés par soudage à la plaque triangulaire (9), forment un ensemble pour lequel il n'existe aucun degré de liberté relatif sans qu'il y ait rupture de liaison.
- Les anneaux élastiques en prise serrée sur l'arbre-moteur (13) et sur les arbres de transmission (19) ne peuvent bouger par rapport à ces derniers.

L'arbre moteur (12), les trois arbres de transmission (14), la plaque triangulaire (9) et les anneaux élastiques (13 et 19) forment donc un seul groupe qui sera nommé arbre d'entrée et identifié par le nombre [1].

En plus des deux regroupements précédents, il y a les trois galets de pression (16), lesquels seront identifiés par les nombres [2], [3] et [4].

Le graphe des liaisons de la pompe à corps déformable est illustré à la figure 3.13. Le couple ( $C_e$ ), imposant une rotation dans le sens horaire à l'arbre d'entrée (1), y est indiqué. La force de pression ( $F_p$ ), due au fluide en aval du galet de pression se trouvant sur le tuyau de caoutchouc, passe par le centre de pression de celui-ci. Elle sera considérée dans la modélisation de la liaison entre le galet de pression [4] et le boîtier [0].

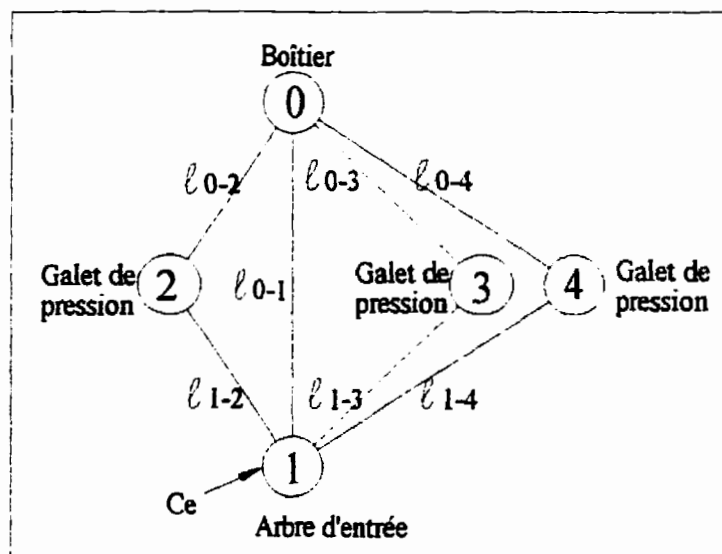


Figure 3.13: Graphe des liaisons de la pompe

### 1.3) Détermination du modèle de liaison cinématique correspondant à chacune des liaisons mécaniques dans le mécanisme

#### Liaison $\ell_{0,1}$

Entre le groupe arbre d'entrée [1] et le groupe boîtier [0] il y a deux roulements rigides à billes. Ces roulements font en sorte que les groupes arbre d'entrée [1] et boîtier [0] conservent en permanence une droite en commun, mais ne permettent pas de mouvement relatif le long de cette droite. Le modèle de liaison cinématique correspondant à la liaison mécanique engendrée par ces deux roulements est une liaison pivot. Le lecteur est prié de se référer au chapitre IV pour plus de détails.

#### Liaison $\ell_{1,2}$

Entre les groupes arbre d'entrée [1] et galet de pression [2] se trouve également deux roulements rigides à billes. Les mouvements relatifs entre ces deux groupes, permis par les roulements, sont identiques au cas précédent, soit une rotation autour de l'axe

commun. Le modèle de liaison cinématique correspondant à la liaison mécanique engendrée par ces deux roulements est par conséquent elle aussi une liaison pivot.

#### Liaison $\ell_{1-3}$

La liaison entre les groupes arbre d'entrée [1] et galet de pression [3] est pareille à la liaison  $\ell_{1-2}$ , soit une liaison pivot.

#### Liaison $\ell_{1-4}$

La liaison entre le groupe arbre d'entrée [1] et le groupe galet de pression [4] est identique aux deux liaisons précédentes, c'est-à-dire à une liaison pivot.

#### Liaison $\ell_{0-2}$

Le galet [2] et le boîtier [0], au cours de leurs déplacements relatifs possibles, conservent toujours une droite en commun susceptible de se déplacer sur au moins l'un d'eux. La liaison entre ces deux composants est une liaison linéaire rectiligne.

#### Liaison $\ell_{0-3}$

La liaison entre le galet [3] et le boîtier [0] est la même que la liaison  $\ell_{2-0}$ , soit une liaison linéaire rectiligne.

#### Liaison $\ell_{0-4}$

La liaison entre le galet [4] et le boîtier [0] est également modélisée par une liaison linéaire rectiligne. Cependant, à cause de la force de pression ( $F_p$ ) en aval du galet de pression [4], cette linéaire rectiligne doit être inclinée de la même façon que la force de pression.

Ayant déterminé la nature des liaisons reliant chacun des groupes il est maintenant possible de dessiner le schéma cinématique du mécanisme. Ce schéma est illustré à la figure 3.14.

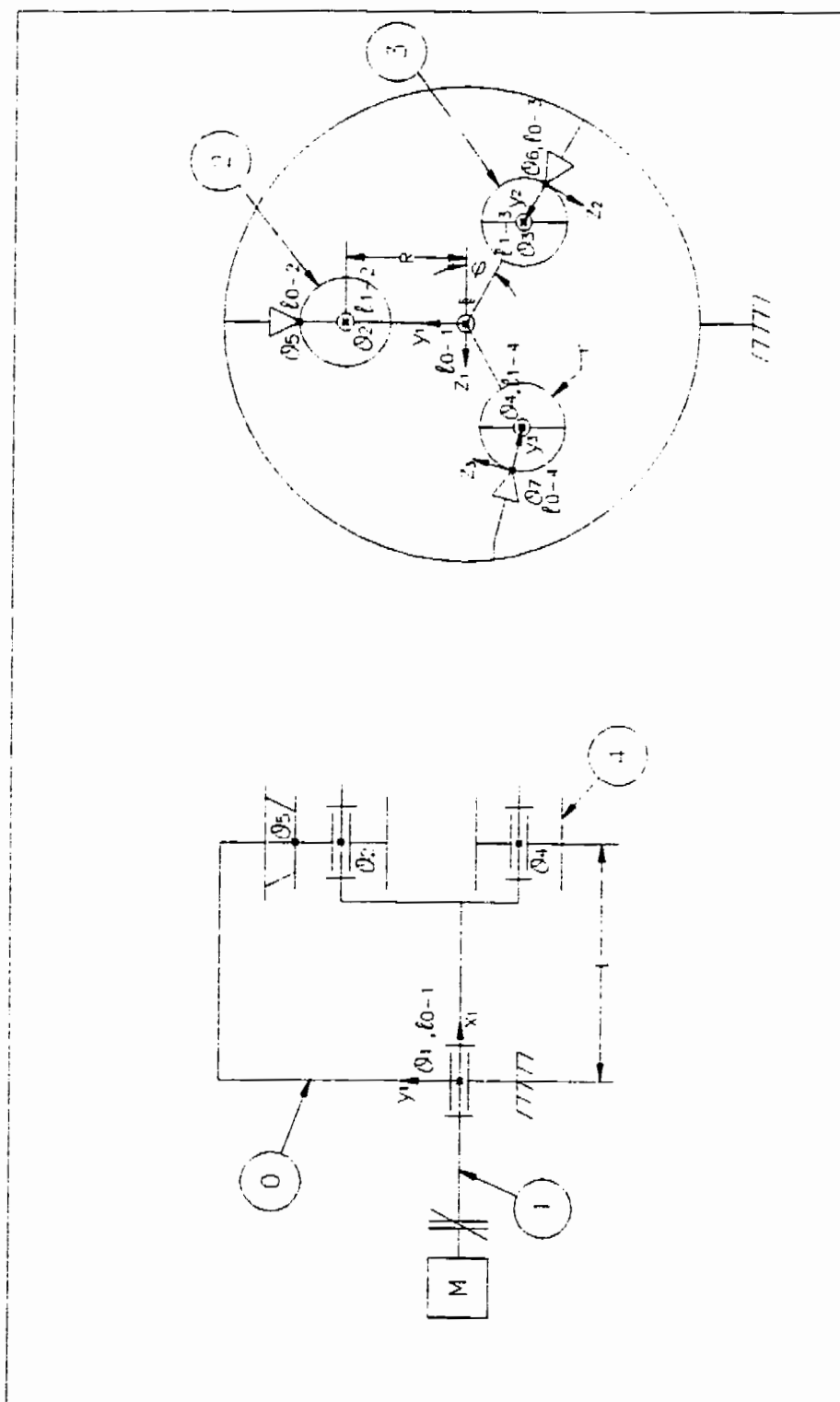


Figure 3.14: Schéma cinématique de la pompe

#### 1.4) Identification des torseurs statiques correspondant à chacune des liaisons dans un repère local propre à la liaison

Les torseurs statiques, tels qu'exprimés dans un repère local propre à la liaison (voir schéma cinématique ci-haut), sont donnés ci-après.

$\ell_{0-1}$ : Liaison pivot d'axe  $x_1$ , d'origine  $O_1$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{0-1}^1 & 0 \\ Y_{0-1}^1 & M_{0-1}^1 \\ Z_{0-1}^1 & N_{0-1}^1 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (3.36)$$

$\ell_{1-2}$ : Liaison pivot d'axe  $x_1$ , d'origine  $O_2$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-2}^1 & 0 \\ Y_{1-2}^1 & M_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 & N_{1-2}^1 \end{array} \right\}_{O_2, x_1 y_1 z_1} \quad (3.37)$$

$\ell_{1-3}$ : Liaison pivot d'axe  $x_1$ , d'origine  $O_3$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 3)}^{\ell_{1-3}} \right\}_{O_3, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-3}^1 & 0 \\ Y_{1-3}^1 & M_{1-3}^1 \\ Z_{1-3}^1 & N_{1-3}^1 \end{array} \right\}_{O_3, x_1 y_1 z_1} \quad (3.38)$$

$\ell_{1-4}$ : Liaison pivot d'axe  $x_1$ , d'origine  $O_4$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 4)}^{\ell_{1-4}} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-4}^1 & 0 \\ Y_{1-4}^1 & M_{1-4}^1 \\ Z_{1-4}^1 & N_{1-4}^1 \end{array} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} \quad (3.39)$$

$\ell_{0-2}$ : Liaison linéaire rectiligne de droite de contact  $x_1$ , d'origine  $O_5$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_5, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{2-0}^1 & 0 \\ 0 & N_{2-0}^1 \end{array} \right\}_{O_5, x_1 y_1 z_1} \quad (3.40)$$

$\ell_{0-3}$ : Liaison linéaire rectiligne de droite de contact  $x_2$ , d'origine  $O_6$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 3)}^{\ell_{0-3}} \right\}_{O_6, x_2 y_2 z_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{3-0}^2 & 0 \\ 0 & N_{3-0}^2 \end{array} \right\}_{O_6, x_2 y_2 z_2} \quad (3.41)$$

$\ell_{0-4}$ : Liaison linéaire rectiligne de droite de contact  $x_3$ , d'origine  $O_7$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 4)}^{\ell_{0-4}} \right\}_{O_7, x_3 y_3 z_3} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Fp & 0 \\ 0 & N_{4-0}^3 \end{array} \right\}_{O_7, x_3 y_3 z_3} \quad (3.42)$$

## Étape 2: Analyse hyperstatique

### 2.1) Analyse du degré d'hyperstatisme

D'après le graphe des liaisons réalisé précédemment, la pompe à corps déformable comprend, avec le boîtier [0], cinq sous-ensembles [1], [2], [3] et [4]. L'application du principe fondamental de la statique à chacun d'eux, excepté le boîtier [0], conduit à:

$$6(5-1) = 24 \text{ équations statiques (Es)} \quad (3.43)$$

À partir des torseurs statiques correspondant à chacune des liaisons, il est possible d'identifier:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 2 + 2 + 1 = 25 \text{ inconnues d'équilibre statique (Is)} \quad (3.44)$$

Le degré d'hyperstatisme se calcule alors à l'aide de la formule:

$$m_s = m - m_c \quad (3.45)$$

$$\text{avec } m = Es - Is = 24 - 25 = -1 \quad (3.46)$$

$$\text{et } m_c = m_c^{\text{int}} + m_c^{\text{ext}} \quad (3.47)$$

Sachant que le mécanisme comporte une mobilité cinématique externe, soit le mouvement de rotation de l'arbre d'entrée causé par le moteur qui actionne la pompe, de même que

trois mobilités cinématiques internes, le mouvement de rotation des galets de pression, le nombre de mobilités cinématiques total est donc égal à:

$$m_c = m_c^{\text{ext}} + m_c^{\text{int}} = 1 + 3 = 4 \quad (3.48)$$

Ceci permet de déterminer le nombre de sources d'hyperstatisme, lequel correspond au nombre d'inconnues principales du système d'équations résultant de l'application du principe fondamental de la statique aux pièces ou sous-ensembles du mécanisme:

$$m_s = m - m_c = -1 - 4 = -5 \quad (3.49)$$

$\Rightarrow 5$  degrés d'hyperstatisme

À noter que, comme il y a une mobilité cinématique externe, une des forces agissant sur le système (Fp ou Ce) est inconnue. Le couple d'entrée (Ce), provenant du moteur servant à faire fonctionner la pompe, est le plus probable.

## 2.2) Analyse statique

L'analyse du degré d'hyperstatisme a révélé l'existence de cinq sources d'hyperstatisme à l'intérieur du système mécanique étudié. Dans le but d'évaluer leurs répercussions sur chacun des groupes, l'équilibre des sous-ensembles [1], [2], [3] et [4] est réalisé.

### 2.2.1) Équilibre du groupe arbre d'entrée [1]

#### a - Choix du repère groupe

Le graphe des liaisons (figure 3.13, page 66) révèle que le groupe arbre d'entrée [1] est contraint par les liaisons  $\ell_{0-1}$ ,  $\ell_{1-2}$ ,  $\ell_{1-3}$ ,  $\ell_{1-4}$  et est soumis au torseur des efforts extérieurs  $\left\{ \tau_{\{\text{ext} \rightarrow 1\}} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1}$ . Les axes des repères locaux, des liaisons impliquées dans l'équilibre de ce composant, tels que définis initialement, sont tous orientés de la même façon ( $x_1, y_1, z_1$ , section 1.4). Cependant, leurs origines ne correspondent pas. Par conséquent, il faut



choisir l'origine de la liaison la plus contrainte comme origine du repère groupe. Comme il s'agit ici de quatre liaisons pivots le choix de l'une ou l'autre n'a pas d'importance. Néanmoins, de façon à simplifier l'application du théorème des moments, permettant le transport d'un torseur d'un point à un autre à l'intérieur d'un même référentiel, nous opterons pour  $O_1$ . Il est intéressant de noter que l'axe  $y_1$  est d'emblée orienté suivant la perpendiculaire commune aux axes de rotation des liaisons  $\ell_{0-1}$  et  $\ell_{1-2}$  (figure 3.14), éléments constitutifs de base de ces liaisons. Le repère groupe arbre d'entrée [1] est donc  $O_1, x_1 y_1 z_1$ .

### ***b - Expression des torseurs dans le repère groupe***

#### Liaison $\ell_{0-1}$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{1-2} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_{0-1}^1 \\ Y_{0-1}^1 \\ Z_{0-1}^1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ M_{0-1}^1 \\ N_{0-1}^1 \end{matrix} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (3.50)$$

#### Liaison $\ell_{1-2}$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{1-2} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \Rightarrow \tilde{R}_{(1 \rightarrow 2)}^{1-2} = \begin{vmatrix} X_{1-2}^1 \\ Y_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 \end{vmatrix} \quad (3.51)$$

$$\Rightarrow \tilde{M}_{(O_1, 1 \rightarrow 2)}^{1-2} = \tilde{M}_{(O_2, 1 \rightarrow 2)}^{1-2} + \tilde{R}_{(1 \rightarrow 2)}^{1-2} \wedge \overrightarrow{O_2 O_1}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \begin{vmatrix} X_{1-2}^1 \\ Y_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 \end{vmatrix} & -L \\ M_{1-2}^1 & & -R \\ N_{1-2}^1 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} RZ_{1-2}^1 \\ M_{1-2}^1 - LZ_{1-2}^1 \\ N_{1-2}^1 - RX_{1-2}^1 + LY_{1-2}^1 \end{vmatrix}$$

Liaison  $\ell_{1-3}$ 

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 3)}^{\ell_{1-3}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \Rightarrow \bar{R}_{(1 \rightarrow 3)}^{\ell_{1-3}} = \begin{vmatrix} X_{1-3}^1 \\ Y_{1-3}^1 \\ Z_{1-3}^1 \end{vmatrix} \quad (3.52)$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{(O_1, 1 \rightarrow 3)}^{\ell_{1-3}} = \bar{M}_{(O_3, 1 \rightarrow 3)}^{\ell_{1-3}} + \bar{R}_{(1 \rightarrow 3)}^{\ell_{1-3}} \wedge \overrightarrow{O_3 O_1}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & X_{1-3}^1 & -L \\ M_{1-3}^1 & Y_{1-3}^1 & R \sin \varphi \\ N_{1-3}^1 & Z_{1-3}^1 & R \cos \varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} R Y_{1-3}^1 \cos \varphi - R Z_{1-3}^1 \sin \varphi \\ M_{1-3}^1 - R X_{1-3}^1 \cos \varphi - L Z_{1-3}^1 \\ N_{1-3}^1 + R X_{1-3}^1 \sin \varphi + L Y_{1-3}^1 \end{vmatrix}$$

Liaison  $\ell_{1-4}$ 

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 4)}^{\ell_{1-4}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \Rightarrow \bar{R}_{(1 \rightarrow 4)}^{\ell_{1-4}} = \begin{vmatrix} X_{1-4}^1 \\ Y_{1-4}^1 \\ Z_{1-4}^1 \end{vmatrix} \quad (3.53)$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{(O_1, 1 \rightarrow 4)}^{\ell_{1-4}} = \bar{M}_{(O_4, 1 \rightarrow 4)}^{\ell_{1-4}} + \bar{R}_{(1 \rightarrow 4)}^{\ell_{1-4}} \wedge \overrightarrow{O_4 O_1}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & X_{1-4}^1 & -L \\ M_{1-4}^1 & Y_{1-4}^1 & R \sin \varphi \\ N_{1-4}^1 & Z_{1-4}^1 & -R \cos \varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -R Y_{1-4}^1 \cos \varphi - R Z_{1-4}^1 \sin \varphi \\ M_{1-4}^1 + R X_{1-4}^1 \cos \varphi - L Z_{1-4}^1 \\ N_{1-4}^1 + R X_{1-4}^1 \sin \varphi + L Y_{1-4}^1 \end{vmatrix}$$

**c - Équilibre statique**

Le principe fondamental de la statique appliqué à ce groupe s'écrit:

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(3 \rightarrow 1)}^{\ell_{1-3}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(4 \rightarrow 1)}^{\ell_{1-4}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(\infty \rightarrow 1)} \right\} = \{ \vec{0} \} \quad (3.54)$$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} - \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} - \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 3)}^{\ell_{1-3}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} - \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 4)}^{\ell_{1-4}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(ext \rightarrow 1)} \right\} = \{ \bar{0} \} \quad (3.55)$$

$$\left\{ \begin{matrix} X_{0-1}^1 \\ Y_{0-1}^1 \\ Z_{0-1}^1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ M_{0-1}^1 \\ N_{0-1}^1 \end{matrix} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} - \left\{ \begin{matrix} X_{1-2}^1 \\ Y_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} RZ_{1-2}^1 \\ M_{1-2}^1 - LZ_{1-2}^1 \\ N_{1-2}^1 - RX_{1-2}^1 + LY_{1-2}^1 \end{matrix} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} Ce \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \{ \bar{0} \} \quad (3.56)$$

$$\left\{ \begin{matrix} X_{1-3}^1 \\ Y_{1-3}^1 \\ Z_{1-3}^1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} RY_{1-3}^1 \cos \varphi - RZ_{1-3}^1 \sin \varphi \\ M_{1-3}^1 - RX_{1-3}^1 \cos \varphi - LZ_{1-3}^1 \\ N_{1-3}^1 + RX_{1-3}^1 \sin \varphi + LY_{1-3}^1 \end{matrix} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} - \left\{ \begin{matrix} X_{1-4}^1 \\ Y_{1-4}^1 \\ Z_{1-4}^1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -RY_{1-4}^1 \cos \varphi - RZ_{1-4}^1 \sin \varphi \\ M_{1-4}^1 + RX_{1-4}^1 \cos \varphi - LZ_{1-4}^1 \\ N_{1-4}^1 + RX_{1-4}^1 \sin \varphi + LY_{1-4}^1 \end{matrix} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \{ \bar{0} \}$$

Soit au bilan:

$$X_{0-1}^1 - X_{1-2}^1 - X_{1-3}^1 - X_{1-4}^1 = 0 \quad (3.57)$$

$$Y_{0-1}^1 - Y_{1-2}^1 - Y_{1-3}^1 - Y_{1-4}^1 = 0$$

$$Z_{0-1}^1 - Z_{1-2}^1 - Z_{1-3}^1 - Z_{1-4}^1 = 0$$

$$-RZ_{1-2}^1 - RY_{1-3}^1 \cos \varphi + RZ_{1-3}^1 \sin \varphi + RY_{1-4}^1 \cos \varphi + RZ_{1-4}^1 \sin \varphi + Ce = 0$$

$$M_{0-1}^1 - M_{1-2}^1 + LZ_{1-2}^1 - M_{1-3}^1 + RX_{1-3}^1 \cos \varphi + LZ_{1-3}^1 - M_{1-4}^1 - RX_{1-4}^1 \cos \varphi + LZ_{1-4}^1 = 0$$

$$N_{0-1}^1 - N_{1-2}^1 + RX_{1-2}^1 - LY_{1-2}^1 - N_{1-3}^1 - RX_{1-3}^1 \sin \varphi - LY_{1-3}^1 - N_{1-4}^1 - RX_{1-4}^1 \sin \varphi - LY_{1-4}^1 = 0$$

#### d - Conclusion

D'après ces équations, il est possible de constater des hyperstatismes de translation suivant tous les axes, et de moment autour de y et z. L'équation de moment autour de x comportant uniquement des termes induits, il n'y a pas d'hyperstatisme de moment suivant cet axe.

#### 2.2.2) Équilibre du groupe galet de pression [2]

##### a - Choix du repère groupe

Le galet de pression [2] est contraint par les liaisons  $\ell_{0-2}$  et  $\ell_{1-2}$  (voir figure 3.13). Les référentiels locaux associés à ces liaisons sont déjà orientés de la même façon, c'est-à-dire

suivant  $x_1y_1z_1$  (voir section 1.4). L'origine de la liaison  $\ell_{0-2}$ ,  $O_2$ , est choisi comme origine du repère groupe, cette dernière étant la plus contrainte. Le référentiel groupe résultant,  $O_2x_1y_1z_1$ , se trouve d'emblée orienté selon la perpendiculaire commune à la droite de contact de  $\ell_{0-2}$  et à l'axe de rotation de  $\ell_{1-2}$  (figure 3.14).

### ***b - Expression des torseurs dans le repère groupe***

#### Liaison $\ell_{1-2}$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_1y_1z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-2}^1 & 0 \\ Y_{1-2}^1 & M_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 & N_{1-2}^1 \end{array} \right\}_{O_2, x_1y_1z_1} \quad (3.58)$$

#### Liaison $\ell_{0-2}$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_2, x_1y_1z_1} \Rightarrow \bar{R}_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} = \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{0-2}^1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.59)$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{(O_2, 0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} = \bar{M}_{(O_2, 0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} + \bar{R}_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \wedge \overrightarrow{O_2O_2}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{0-2}^1 & -r \\ N_{0-2}^1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{0-2}^1 \end{vmatrix}$$

### ***c - Équilibre statique***

Le principe fondamental de la statique appliqué à cette pièce s'écrit:

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_2, x_1y_1z_1} + \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_1y_1z_1} = \{\bar{0}\} \quad (3.60)$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{0-2}^1 & 0 \\ 0 & N_{0-2}^1 \end{array} \right\}_{O_2, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-2}^1 & 0 \\ Y_{1-2}^1 & M_{1-2}^1 \\ Z_{1-2}^1 & N_{1-2}^1 \end{array} \right\}_{O_2, x_1 y_1 z_1} = \{\bar{0}\} \quad (3.61)$$

Soit au bilan:

$$\begin{array}{ll} X_{1-2}^1 = 0 & 0 = 0 \\ Y_{0-2}^1 + Y_{1-2}^1 = 0 & M_{1-2}^1 = 0 \\ Z_{1-2}^1 = 0 & N_{0-2}^1 + N_{1-2}^1 = 0 \end{array} \quad (3.62)$$

#### ***d - Conclusion***

D'après ces équations, il est possible de constater un hyperstatisme de translation suivant l'axe des y ( $Y_{0-2}^1$  ou  $Y_{1-2}^1$ ), un de moment suivant l'axe des z ( $N_{0-2}^1$  ou  $N_{1-2}^1$ ).

### ***2.2.3) Équilibre du groupe galet de pression [3]***

#### ***a - Choix du repère groupe***

Le galet de pression [3] est contraint par les liaisons  $\ell_{0-3}$  et  $\ell_{1-3}$ . De par la nature de ces liaisons et la façon dont elles sont positionnées dans l'espace, il est possible d'orienter leur système d'axe de la même façon. Ceci peut-être réalisé en alignant le référentiel de la liaison pivot comme celui de la linéaire rectiligne. Toutefois, la liaison pivot comportant le plus d'inconnues statiques, son origine est choisie comme origine du repère groupe, soit  $O_3, x_2 y_2 z_2$ .

#### ***b - Expression des torseurs dans le repère groupe***

Liaison  $\ell_{1-3}$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 3)}^{f_{1-3}} \right\}_{O_3, x_2 y_2 z_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-3}^1 & 0 \\ Y_{1-3}^1 & M_{1-3}^1 \\ Z_{1-3}^1 & N_{1-3}^1 \end{array} \right\}_{O_3, x_2 y_2 z_2} \quad (3.63)$$

**Liaison  $\ell_{0-3}$** 

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 3)}^{\ell_{0-3}} \right\}_{O_3, x_2 y_2 z_2} \Rightarrow \bar{R}_{(0 \rightarrow 3)}^{\ell_{0-3}} = \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{0-3}^2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.64)$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{(O_3, 0 \rightarrow 3)}^{\ell_{0-3}} = \bar{M}_{(O_6, 0 \rightarrow 3)}^{\ell_{0-3}} + \bar{R}_{(0 \rightarrow 3)}^{\ell_{0-3}} \wedge \overrightarrow{O_6 O_3}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{0-3}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{0-3}^2 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{0-3}^2 \end{vmatrix}$$

**c - Équilibre statique**

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 3)}^{\ell_{0-3}} \right\}_{O_3, x_2 y_2 z_2} + \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 3)}^{\ell_{1-3}} \right\}_{O_3, x_2 y_2 z_2} = \{ \bar{0} \} \quad (3.65)$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{0-3}^2 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{0-3}^2 \end{vmatrix} \right\}_{O_3, x_2 y_2 z_2} + \left\{ \begin{vmatrix} X_{1-3}^1 \\ Y_{1-3}^1 \\ Z_{1-3}^1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ M_{1-3}^1 \\ N_{1-3}^1 \end{vmatrix} \right\}_{O_3, x_2 y_2 z_2} = \{ \bar{0} \} \quad (3.66)$$

Et au bilan:

$$\begin{aligned} X_{1-3}^1 &= 0 & 0 &= 0 \\ Y_{0-3}^2 + Y_{1-3}^1 &= 0 & M_{1-3}^1 &= 0 \\ Z_{1-3}^1 &= 0 & N_{0-3}^2 + N_{1-3}^1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

**d - Conclusion**

D'après ces équations, il est possible de constater un hyperstatisme de translation suivant l'axe des y ( $Y_{0-3}^2$  ou  $Y_{1-3}^1$ ), et un de moment autour de l'axe des z ( $N_{0-3}^2$  ou  $N_{1-3}^1$ ).

### 2.2.4) Équilibre du groupe galet de pression [4]

#### a - Choix du repère groupe

Le graphe de structure (figure 3.13) montre que le galet de pression [4] est contraint par les liaisons  $\ell_{0-4}$  et  $\ell_{1-4}$ . Une étude semblable à celle effectuée pour le galet [3] permet de définir le repère groupe comme étant  $O_4, x_3 y_3 z_3$ .

#### b - Expression des torseurs dans le repère groupe

##### Liaison $\ell_{1-4}$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 4)}^{\ell_{1-4}} \right\}_{O_4, x_3 y_3 z_3} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-4}^1 & 0 \\ Y_{1-4}^1 & M_{1-4}^1 \\ Z_{1-4}^1 & N_{1-4}^1 \end{array} \right\}_{O_4, x_3 y_3 z_3} \quad (3.68)$$

##### Liaison $\ell_{0-4}$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 4)}^{\ell_{0-4}} \right\}_{O_4, x_3 y_3 z_3} \Rightarrow \tilde{R}_{(0 \rightarrow 4)}' = \begin{vmatrix} 0 \\ Fp \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.69)$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{(O_4, 0 \rightarrow 4)}^{\ell_{0-4}} = \bar{M}_{(O_7, 0 \rightarrow 4)}^{\ell_{0-4}} + \tilde{R}_{(0 \rightarrow 4)}' \wedge \overrightarrow{O_7 O_4}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{0-4}^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ Fp \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{0-4}^3 \end{vmatrix}$$

#### c - Équilibre statique

Le principe fondamental de la statique appliqué à cette pièce s'écrit:

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 4)}^{\ell_{0-4}} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 4)}^{\ell_{1-4}} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} = \{\bar{0}\} \quad (3.70)$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline F_p & 0 \\ \hline 0 & N_{0-4}^3 \end{array} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-4}^1 & 0 \\ \hline Y_{1-4}^1 & M_{1-4}^1 \\ \hline Z_{1-4}^1 & N_{1-4}^1 \end{array} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} = \{\bar{0}\} \quad (3.71)$$

Soit au bilan:

$$\begin{array}{ll} X_{1-4}^1 = 0 & 0 = 0 \\ Y_{1-4}^1 + F_p = 0 & M_{1-4}^1 = 0 \\ Z_{1-4}^1 = 0 & N_{0-4}^3 + N_{1-4}^1 = 0 \end{array} \quad (3.72)$$

#### ***d - Conclusion***

La force de pression  $F_p$  étant supposée connue, seul un hyperstatisme de moment suivant l'axe des  $z$  ( $N_{0-4}^3$  ou  $N_{1-4}^1$ ) existe.

La propagation des conclusions obtenues lors de l'équilibre des groupes [2], [3] et [4] au sous-ensemble arbre d'entrée [1], permet d'éliminer les hyperstatismes de translation en  $x$  et  $z$ , ainsi que l'hyperstatisme de moment en  $y$  relatif à ce composant. Seuls les hyperstatismes de translation en  $y$  et de moment autour de  $z$  persistent.

#### ***2.2.5) Bilan global***

Le bilan global, présenté ci-après, permet de vérifier que, comme prévu par l'analyse du degré d'hyperstatisme, il y a bien cinq sources d'hyperstatisme. Par exemple, la connaissance des variables  $Y_{1-2}$ ,  $Y_{1-3}$ ,  $N_{1-2}$ ,  $N_{1-3}$  et  $N_{1-4}$  permet de déterminer toutes les autres inconnues du système. Quelles que soient ces sources d'hyperstatisme, elles se traduisent par un hyperstatisme de translation suivant  $y$  et un hyperstatisme de moment suivant  $z$ , sur le groupe arbre d'entrée [1] et les groupes galet de pression [2] et [3], et par un hyperstatisme de moment autour de  $z$  pour le groupe galet de pression [4].



### Équilibre de l'arbre d'entrée [1]

$$\begin{aligned}
 X_{0-1}^1 - X_{1-2}^1 - X_{1-3}^1 - X_{1-4}^1 &= 0 \\
 Y_{0-1}^1 - Y_{1-2}^1 - Y_{1-3}^1 - Y_{1-4}^1 &= 0 \\
 Z_{0-1}^1 - Z_{1-2}^1 - Z_{1-3}^1 - Z_{1-4}^1 &= 0 \\
 -RZ_{1-2}^1 - RY_{1-3}^1 \cos \varphi + RZ_{1-3}^1 \sin \varphi + RY_{1-4}^1 \cos \varphi + RZ_{1-4}^1 \sin \varphi + C_e &= 0 \\
 M_{0-1}^1 - M_{1-2}^1 + LZ_{1-2}^1 - M_{1-3}^1 + RX_{1-3}^1 \cos \varphi + LZ_{1-3}^1 - M_{1-4}^1 - RX_{1-4}^1 \cos \varphi + LZ_{1-4}^1 &= 0 \\
 N_{0-1}^1 - N_{1-2}^1 + RX_{1-2}^1 - LY_{1-2}^1 - N_{1-3}^1 - RX_{1-3}^1 \sin \varphi - LY_{1-3}^1 - N_{1-4}^1 - RX_{1-4}^1 \sin \varphi - LY_{1-4}^1 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

### Équilibre du galet [2]

$$\begin{aligned}
 X_{1-2}^1 &= 0 \\
 Y_{0-2}^1 + Y_{1-2}^1 &= 0 \\
 Z_{1-2}^1 &= 0 \\
 0 &= 0 \\
 M_{1-2}^1 &= 0 \\
 N_{0-2}^1 + N_{1-2}^1 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

### Équilibre du galet [3]

$$\begin{aligned}
 X_{1-3}^1 &= 0 \\
 Y_{0-3}^2 + Y_{1-3}^1 &= 0 \\
 Z_{1-3}^1 &= 0 \\
 0 &= 0 \\
 M_{1-3}^1 &= 0 \\
 N_{0-3}^2 + N_{1-3}^1 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

### Équilibre du galet [4]

$$\begin{aligned}
 X_{1-4}^1 &= 0 \\
 Y_{1-4}^1 + F_p &= 0 \\
 Z_{1-4}^1 &= 0 \\
 0 &= 0 \\
 M_{1-4}^1 &= 0 \\
 N_{0-4}^3 + N_{1-4}^1 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

## Étape 3: Spécification du tolérancement géométrique

### **3.1) Proposition des conditions fonctionnelles de position et d'orientation permettant de contrôler les hyperstatismes**

À partir des résultats de l'analyse statique effectuée précédemment, les conditions fonctionnelles nécessaires pour contrôler les effets des sources d'hyperstatisme sont déterminées. Celles-ci sont illustrées à la figure 3.15.

#### **3.1.1) Conditions fonctionnelles relatives au groupe arbre d'entrée [1]**

Les sources d'hyperstatisme engendrent sur le groupe arbre d'entrée [1] un hyperstatisme de translation suivant y et de moment autour de z.

### *Hyperstatisme de translation suivant y*

Afin de contrôler la compatibilité de position en y (le rayon), entre les axes de mouvement des liaisons cinématiques contraignant le groupe arbre d'entrée [1], il est nécessaire d'ajouter une tolérance de position ( $T_1$ , figure 3.15) entre l'axe de chacun des galets [2], [3] et [4], en relation avec l'arbre d'entrée [1], et l'axe du boîtier [0], également en relation avec l'arbre d'entrée [1]. Les axes de mouvements des galets se trouvent automatiquement positionnés les uns par rapport aux autres.

### *Hyperstatisme de moment autour de z*

De la même façon, pour contrôler l'effet de l'hyperstatisme de moment autour de z, il faut poser une tolérance de parallélisme ( $T_2$ , figure 3.15) entre l'axe de chacun des galets [2], [3] et [4], en relation avec l'arbre d'entrée [1], et l'axe du boîtier [0], également en relation avec l'arbre d'entrée [1]. Les axes de mouvements des galets se trouvent, ici encore, automatiquement orientés les uns par rapport aux autres.

### **3.1.2) Conditions fonctionnelles relatives aux galets de pression [2], [3] et [4]**

Bien que l'analyse hyperstatique n'ait pas montré d'hyperstatisme de translation suivant y pour le galet [4], il faut se rappeler ici qu'il s'agit d'un système en rotation. De ce fait, tôt ou tard le galet [4] se retrouvera sur la bande d'amortissement, dans quel cas un mauvais positionnement de ce dernier nuirait au fonctionnement cinématique du mécanisme. C'est pourquoi tous les galets doivent être traités de la même manière, soit de la façon la plus restrictive. Aussi est-il nécessaire d'imposer une tolérance de profil ( $T_3$ , figure 3.15) sur la surface de la bande d'amortissement (groupe [0]), en liaison avec les galets [2], [3] et [4], et les axes des trois arbres de transmission (groupe [1]), également en liaison avec les galets. Cette condition fonctionnelle contrôlera à la fois l'hyperstatisme de translation suivant y et celui de moment autour de z.

### 3.1.3) Conditions fonctionnelles relatives au groupe boîtier [0]

La fermeture de la chaîne de position sur le boîtier [0] implique d'imposer une tolérance de forme ( $T_4$ , figure 3.15) sur la surface de chacun des galets [2], [3] et [4], en relation avec le boîtier [0] par l'intermédiaire de la bande d'amortissement, et l'axe de l'arbre d'entrée [1], également en relation avec le boîtier [0].

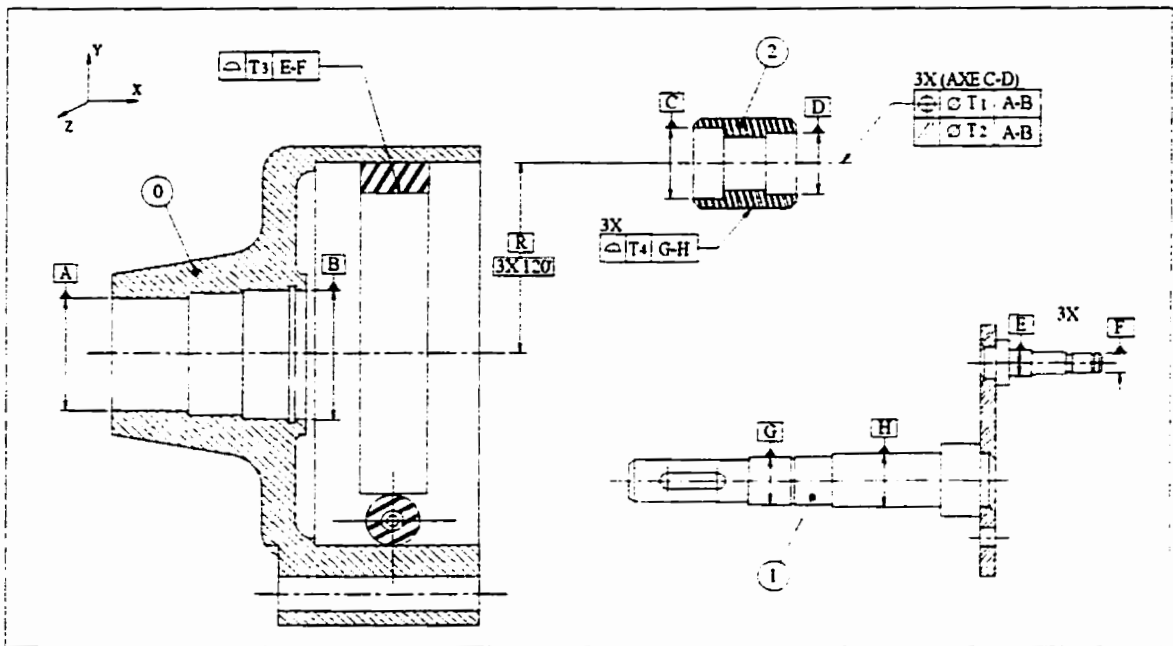


Figure 3.15: Conditions fonctionnelles relatives à la pompe

### 3.2) Proposition du tolérancement géométrique, pour chacune des pièces du système mécanique

Les conditions fonctionnelles relatives à chacun des groupes se propagent à travers les pièces constituant le groupe en question, au moyen des flux fonctionnels. Dans ce qui suit, un tolérancement géométrique possible, pour chacun des groupes est donné.

### 3.2.1) Tolérancement des pièces appartenant au groupe boîtier [0]

Pour contrôler l'effet des hyperstatismes de translation suivant y et de moment autour de z, une condition fonctionnelle de forme ( $T_4$ ) a été imposée à la surface extérieure des galets de pression [2], [3] et [4] par rapport à l'axe de l'arbre d'entrée [1]. Cette condition fonctionnelle se traduit, sur le boîtier [0], par une tolérance de forme de la surface interne de la bande d'amortissement, par rapport à l'axe généré par les surfaces d'appui des roulements (10) et (11), soit les références A et B sur la figure 3.16.

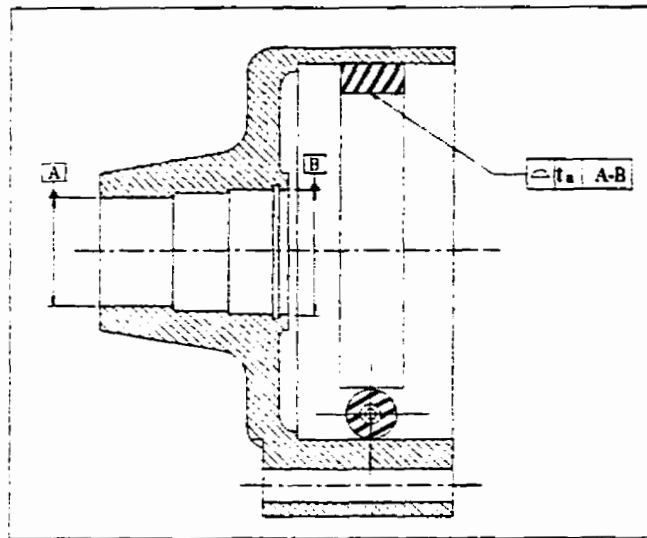


Figure 3.16: Tolérancement du groupe boîtier [0]

### 3.2.2) Tolérancement des pièces appartenant au groupe arbre d'entrée [1]

Des conditions fonctionnelles de position ( $T_1$ ) et de parallélisme ( $T_2$ ) ont été appliquées entre les axes des trois galets de pression [2], [3] et [4], en relation avec l'arbre d'entrée [1] et l'axe du boîtier [0], également en relation avec l'arbre d'entrée. Cette application a permis de remédier respectivement à l'hyperstatisme de translation en y et de moment autour de z, présents pour ce composant. Ces conditions fonctionnelles se traduisent, sur le groupe arbre d'entrée [1], par un contrôle de position et un contrôle d'orientation entre les axes des arbres de transmission (14) et l'axe de l'arbre moteur (12). Pour y parvenir, il est nécessaire de poser:

### *Contrôle de position*

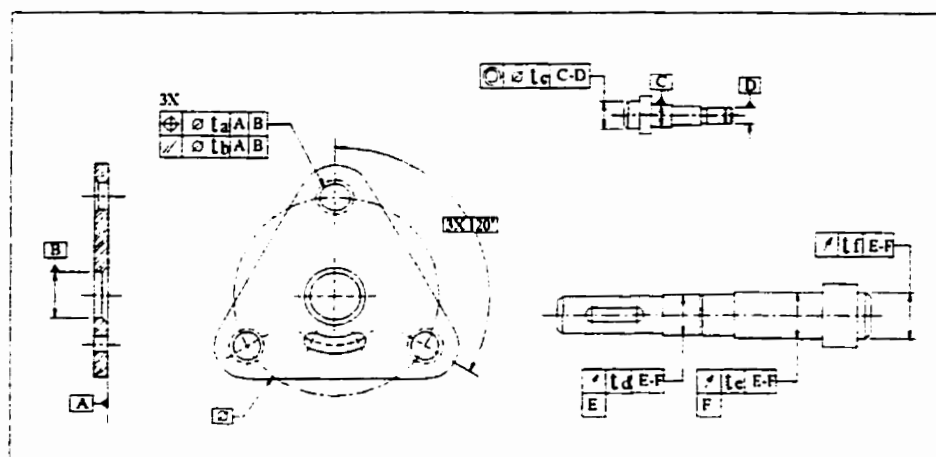
- une tolérance de concentricité entre l'axe de la partie de l'arbre de transmission (14) s'insérant dans la plaque triangulaire (9), par rapport à l'axe généré par les surfaces d'appui des roulements à billes (15) et (17), soit les références C et D de la figure 3.17. Ceci a pour effet d'assurer la propagation du contrôle de position vers la plaque triangulaire (9);
- une tolérance de position entre l'axe de chacun des orifices servant à recevoir les arbres de transmission (14), par rapport à l'axe du trou destiné à l'arbre moteur (12). Ceci a pour effet d'assurer la propagation du contrôle de position vers l'arbre moteur (12);
- une tolérance de battement simple entre l'axe de la partie de l'arbre moteur (12) s'insérant dans la plaque triangulaire (9), par rapport à l'axe généré par les surfaces d'appui des roulements à billes (10) et (11), soit les références E et F de la figure 3.17, bouclant ainsi le parcours entre les axes des arbres de transmission (14) et l'axe de l'arbre moteur (12).

### *Contrôle d'orientation*

- C'est la tolérance de concentricité entre l'axe de la partie de l'arbre de transmission (14) s'insérant dans la plaque triangulaire (9), par rapport à l'axe généré par les surfaces d'appui des roulements à billes (15) et (17), qui assure la propagation du contrôle d'orientation vers la plaque triangulaire (9);
- une tolérance de parallélisme entre l'axe de chacun des orifices servant à recevoir les arbres de transmission (14), par rapport à l'axe du trou destiné à l'arbre moteur (12). Ceci a pour effet d'assurer la propagation du contrôle d'orientation vers l'arbre moteur (12);
- c'est la tolérance de battement simple entre l'axe de la partie de l'arbre moteur (12) s'insérant dans la plaque triangulaire (9), par rapport à l'axe généré par les surfaces d'appui des roulements à billes (10) et (11), qui boucle le parcours entre les axes des

arbres de transmission (14) et l'axe de l'arbre moteur (12) concernant le contrôle d'orientation.

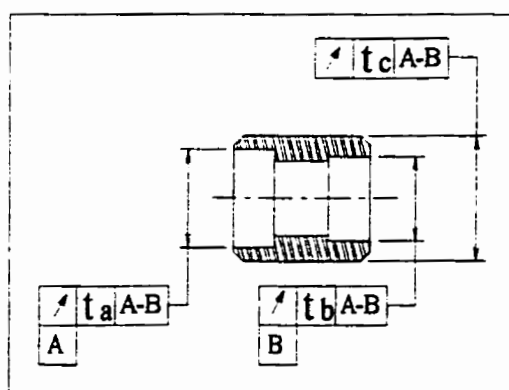
Le tolérancement de chacune des pièces appartenant au groupe arbre d'entrée [1] est illustré à la figure 3.17.



**Figure 3.17:** Tolérancement des pièces du groupe arbre d'entrée [1]

### 3.2.3) Tolérancement des galets de pression [2], [3] et [4]

Finalement, les conditions fonctionnelles relatives aux groupes galet de pression [2], [3] et [4] impliquent une tolérance de battant simple entre l'axe du galet et l'axe de l'alésage, généré par les surfaces d'appui des roulements à billes (15) et (17).



**Figure 3.18:** Tolérancement des galets

## **CHAPITRE IV**

### **DÉTERMINATION DU MODÈLE DE LIAISON**

En ce qui touche la modélisation d'un système mécanique, il a été mentionné que le choix du modèle de liaison cinématique, correspondant à la liaison mécanique dans le mécanisme, demande généralement une certaine réflexion. Il importe ici de distinguer deux cas. Dans le premier cas, la liaison est réalisée par l'entremise d'un ou plusieurs composants technologiques, par exemple des roulements. Le choix du modèle de liaison cinématique doit alors être guidé par les caractéristiques technologiques de l'élément de liaison, et par la nature des sollicitations qu'il sera amené à supporter. Dans le second cas, elle est assurée par le contact entre les pièces impliquées dans la liaison. Dans cette hypothèse, il peut être intéressant de se questionner sur la qualité du contact. Dans un cas comme dans l'autre, il ressort que des hypothèses devront être posées, en regard desquelles il sera possible de juger de la justesse de l'étude et de ses résultats. L'objet du présent chapitre est d'illustrer le type de cheminement menant au choix d'un modèle de liaison, dans le cas d'une liaison réalisée au moyen de composants technologiques, et par contact entre les pièces.

#### **4.1 Liaison réalisée au moyen de composants technologiques**

Un des cas les plus complexes de modélisation d'une liaison, réalisée au moyen de composants technologiques, est celui impliquant des roulements. La liaison entre l'arbre d'entrée et un des galets de pression, de la pompe péristaltique étudiée précédemment, est un bon exemple. Ici, deux liaisons en parallèle entre l'arbre d'entrée et le galet sont réalisées par l'intermédiaire de deux roulements rigides à billes (voir figure 4.1). Afin de déterminer le modèle de liaison reflétant le mieux, d'abord chacune des liaisons, puis, la liaison équivalente à ces deux liaisons, il est nécessaire de considérer les éléments constitutifs des roulements séparément. Les solides intervenant dans la liaison engendrée

par le roulement R1 sont le galet de pression, la bague extérieure, les billes et la bague intérieure du roulement R1, ainsi que l'arbre d'entrée. Ceux impliqués dans la seconde liaison sont le galet de pression, la bague extérieure, les billes et la bague intérieure du roulement R2, et l'arbre d'entrée.

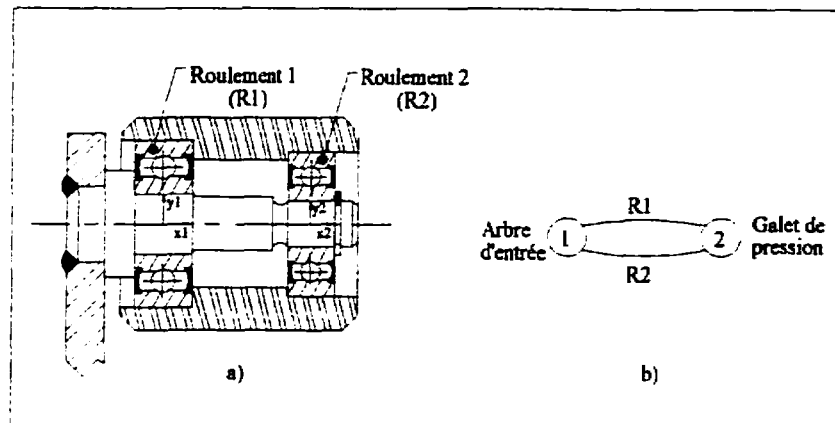


Figure 4.1: a) Représentation de la liaison entre l'arbre d'entrée et un des galets  
b) Graphe des liaisons

### Formulation des hypothèses

Une étude du mouvement relatif bague/direction de charge, pour chacun des roulements, permet d'établir que dans le cas des deux bagues extérieures, la condition existante est celle de charge tournante. En effet, dans ce cas les bagues tournent par rapport à la direction de la charge, laquelle est fixe. Aussi, de façon à éviter les phénomènes de laminage, il convient généralement d'utiliser un ajustement serré. Pour ce qui est des bagues intérieures, celles-ci étant fixes par rapport à la direction de la charge, la condition existante est celle de charge fixe. Dans ce dernier cas, le phénomène de laminage n'est pas à craindre et un ajustement serré n'est donc pas indispensable. Compte tenu de ce qui précède, les hypothèses suivantes peuvent être émises:

- i) Les bagues extérieures sont montées par serrage dans leur logement.
- ii) Les bagues intérieures sont montées libres sur l'arbre.



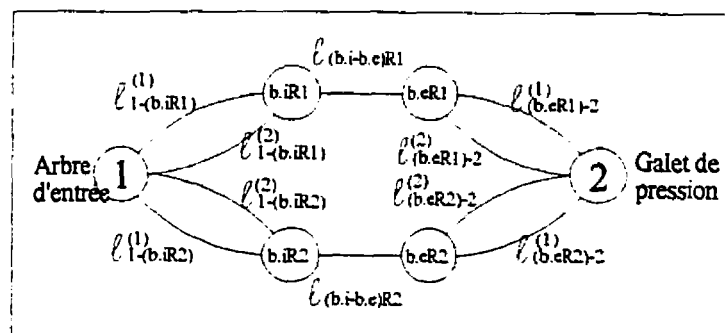
De plus, compte tenu de l'ensemble des forces agissant sur l'arbre et du fait que les roulements rigides à billes peuvent accepter de légers défauts d'alignement sans donner lieu à des contraintes, il est possible de poser l'hypothèse suivante:

- iii) L'angle de déversement admissible d'une bague par rapport à l'autre, qui n'entraîne pas de contraintes supplémentaires dans le roulement, est supérieur à l'angle d'inclinaison maximale de l'axe de la section droite de l'arbre, située au niveau du roulement, par rapport à la ligne moyenne de l'arbre.

À partir de ces hypothèses, il est maintenant possible de modéliser les liaisons créées par les deux roulements, puis d'en déduire la liaison équivalente.

### Modélisation des liaisons

Le graphe des liaisons détaillé, c'est-à-dire prenant en compte les éléments constitutifs des roulements, est illustré à la figure 4.2. Il montre que les liaisons réalisées par les roulements R1 et R2 sont toutes deux composées d'un ensemble de liaisons en série et en parallèle. En regard des hypothèses avancées ci-haut, il faut tout d'abord associer un modèle de liaison cinématique à chacune d'elles, puis, utiliser les règles de composition des liaisons (voir section 2.1.5) pour trouver la liaison équivalente.



**Figure 4.2:** Graphe des liaisons détaillé entre l'arbre d'entrée et le galet

### • Liaison réalisée par le roulement R1

Les liaisons impliquées dans la liaison réalisée par le roulement R1 constituent la partie supérieure du graphe de structure détaillé. Toutes ces liaisons peuvent être exprimées dans le même référentiel, soit  $O_1, x_1, y_1, z_1$  (voir figure 4.1).

#### Liaisons entre l'arbre d'entrée et la bague intérieure

Entre l'arbre d'entrée et la bague intérieure du roulement R1 il y a deux liaisons en parallèle. Une de ces liaisons bloque uniquement la translation en x de la bague par rapport à l'arbre. Il est indiqué de modéliser cette liaison par une ponctuelle dont le torseur statique est:

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow b.iR1)}^{(1)} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-b.iR1}^{1(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} \quad (4.1)$$

En ce qui a trait à l'autre liaison, partant de l'hypothèse que la bague intérieure est montée libre sur l'arbre, celle-ci peut donc tourner et glisser par rapport à ce dernier. Il s'agit donc d'une liaison pivot glissant dont le torseur est:

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow b.iR1)}^{(2)} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{1-b.iR1}^{1(2)} & M_{1-b.iR1}^{1(2)} \\ Z_{1-b.iR1}^{1(2)} & N_{1-b.iR1}^{1(2)} \end{array} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} \quad (4.2)$$

Les règles de composition des liaisons permettent d'écrire que la liaison équivalente à ces deux liaisons en parallèle est égale à:

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow b.iR1)}^{(1)} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} = \left\{ \tau_{(1 \rightarrow b.iR1)}^{(1)} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} + \left\{ \tau_{(1 \rightarrow b.iR1)}^{(2)} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} \quad (4.3)$$

$$\text{d'où} \quad \left\{ \tau_{(1 \rightarrow b.iR1)}^{(1)} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-b.iR1}^{1(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} + \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{1-b.iR1}^{1(2)} & M_{1-b.iR1}^{1(2)} \\ Z_{1-b.iR1}^{1(2)} & N_{1-b.iR1}^{1(2)} \end{array} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} \quad (4.4)$$

$$\text{donc } \left\{ \tau_{(1 \rightarrow b.iR1)}^{(1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_{1-b.iR1}^{(1)} \\ Y_{1-b.iR1}^{(2)} \\ Z_{1-b.iR1}^{(2)} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ M_{1-b.iR1}^{(2)} \\ N_{1-b.iR1}^{(2)} \end{matrix} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.5)$$

### Liaison entre la bague intérieure et la bague extérieure

La liaison entre la bague intérieure et la bague extérieure du roulement R1 est réalisée par l'entremise des billes. Puisque l'inclinaison maximale de l'arbre d'entrée est présumée inférieure au déversement admissible d'une bague par rapport à l'autre, il y a donc lieu de croire qu'aucun effort de moment n'est transmis par la liaison. Toutefois, en raison de la nature d'un roulement rigide à billes, tous les mouvements de translation d'une bague par rapport à l'autre sont bloqués. Aussi, la liaison cinématique modélisant le mieux cette liaison mécanique est la rotule, de torseur:

$$\left\{ \tau_{(b.iR1 \rightarrow b.eR1)}^{(1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_{b.iR1-b.eR1}^{(1)} \\ Y_{b.iR1-b.eR1}^{(1)} \\ Z_{b.iR1-b.eR1}^{(1)} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.6)$$

### Liaisons entre la bague extérieure et le galet de pression

Entre la bague extérieure du roulement R1 et le galet de pression, il y a, là aussi, deux liaisons en parallèle. La première empêche strictement la translation en x de la bague par rapport au galet. Pour cette raison, il est indiqué de modéliser cette liaison par une ponctuelle, dont le torseur statique est:

$$\left\{ \tau_{(b.eR1 \rightarrow 2)}^{(1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_{b.eR1-2}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.7)$$

Considérant que la bague extérieure est montée par serrage sur le galet, la deuxième liaison, entre ces composants, peut être assumée comme étant une liaison encastrement.

Son torseur est:

$$\left\{ \tau_{(b.eR1-2)}^{\ell(2)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{b.eR1-2}^{1(2)} & L_{b.eR1-2}^{1(2)} \\ Y_{b.eR1-2}^{1(2)} & M_{b.eR1-2}^{1(2)} \\ Z_{b.eR1-2}^{1(2)} & N_{b.eR1-2}^{1(2)} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.8)$$

Les règles de composition des liaisons permettent d'écrire que la liaison équivalente à ces deux liaisons en parallèle est égale à:

$$\left\{ \tau_{(b.eR1-2)}^{\ell} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \tau_{(b.eR1-2)}^{\ell(1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(b.eR1-2)}^{\ell(2)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.9)$$

$$\text{d'où } \left\{ \tau_{(b.eR1-2)}^{\ell} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{b.eR1-2}^{1(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \begin{array}{c|c} X_{b.eR1-2}^{1(2)} & L_{b.eR1-2}^{1(2)} \\ Y_{b.eR1-2}^{1(2)} & M_{b.eR1-2}^{1(2)} \\ Z_{b.eR1-2}^{1(2)} & N_{b.eR1-2}^{1(2)} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.10)$$

$$\text{donc } \left\{ \tau_{(b.eR1-2)}^{\ell} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{b.eR1-2}^{1(1)} + X_{b.eR1-2}^{1(2)} & L_{b.eR1-2}^{1(2)} \\ Y_{b.eR1-2}^{1(2)} & M_{b.eR1-2}^{1(2)} \\ Z_{b.eR1-2}^{1(2)} & N_{b.eR1-2}^{1(2)} \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.11)$$

La liaison entre l'arbre d'entrée et le galet de pression, réalisée par le roulement R1, correspond donc à la liaison équivalente aux trois liaisons en série suivantes: une pivot, une rotule et un encastrement. D'après les règles de composition des liaisons, elle est égale à:

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell R1} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \tau_{(1 \rightarrow b.iR1)}^{\ell} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \tau_{(b.iR1 \rightarrow b.eR2)}^{\ell} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \tau_{(b.eR1 \rightarrow 2)}^{\ell} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.12)$$

donc

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell(R1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-b.iR1}^{1(1)} & 0 \\ Y_{1-b.iR1}^{1(2)} & M_{1-b.iR1}^{1(2)} \\ Z_{1-b.iR1}^{1(2)} & N_{1-b.iR1}^{1(2)} \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{b.iR1-b.eR1}^{1(1)} & 0 \\ Y_{b.iR1-b.eR1}^{1(2)} & 0 \\ Z_{b.iR1-b.eR1}^{1(2)} & 0 \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{b.eR1-2}^{1(1-2)} & L_{b.eR1-2}^{1(2)} \\ Y_{b.eR1-2}^{1(2)} & M_{b.eR1-2}^{1(2)} \\ Z_{b.eR1-2}^{1(2)} & N_{b.eR1-2}^{1(2)} \end{array} \right\}_{O_1} \quad (4.13)$$

$$\text{d'où } \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell(R1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-2}^{1(R1)} & 0 \\ Y_{1-2}^{1(R1)} & 0 \\ Z_{1-2}^{1(R1)} & 0 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad \text{soit une liaison rotule.} \quad (4.14)$$

• ***Liaison réalisée par le roulement R2***

Une analyse identique à celle effectuée pour le roulement R1 peut être faite pour le roulement R2. Dans ce cas, cependant, le référentiel commun à toutes les liaisons est  $O_2, x_2 y_2 z_2$  (voir figure 4.1). Ainsi, selon les hypothèses formulées plus haut, le modèle de liaison cinématique, correspondant à la liaison réalisée par ce roulement, est une liaison rotule dont le torseur est:

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{L(R2)} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = \left\{ \begin{array}{c} X_{1-2}^{2(R2)} \\ Y_{1-2}^{2(R2)} \\ Z_{1-2}^{2(R2)} \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} \quad (4.15)$$

• ***Liaison équivalente aux liaisons réalisées par les roulements R1 et R2***

Comme il a été remarqué antérieurement, les deux liaisons rotules, générées par les roulements R1 et R2, sont en parallèle. De façon à utiliser les règles de composition des liaisons pour trouver la liaison équivalente, il faut exprimer les torseurs associés à ces liaisons dans le même référentiel. Les axes des repères adjoints à chacune de ces liaisons étant de même orientation, il n'est pas nécessaire de faire de changement de base. Par contre, il faut utiliser le théorème des moments pour les exprimer au même point d'origine. Il a été choisi, arbitrairement, d'exprimer les torseurs dans le référentiel  $O_1, x_1 y_1 z_1$  (les deux liaisons étant identiques, elles sont aussi contraintes l'une que l'autre). Ainsi:

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{L(R1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c} X_{1-2}^{1(R1)} \\ Y_{1-2}^{1(R1)} \\ Z_{1-2}^{1(R1)} \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.16)$$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell(R2)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \Rightarrow \bar{R}_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell(R2)} = \begin{vmatrix} X_{1-2}^{1(R2)} \\ Y_{1-2}^{1(R2)} \\ Z_{1-2}^{1(R2)} \end{vmatrix} \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{(O_1, 1 \rightarrow 2)}^{\ell(R2)} = \bar{M}_{(O_2, 1 \rightarrow 2)}^{\ell(R2)} + \bar{R}_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell(R2)} \wedge \vec{O_2 O_1}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & X_{1-2}^{1(R2)} \\ 0 & Y_{1-2}^{1(R2)} \\ 0 & Z_{1-2}^{1(R2)} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ -dZ_{1-2}^{1(R2)} \\ dY_{1-2}^{1(R2)} \end{vmatrix}$$

$$\text{d'où } \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell(R2)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell(R1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell(R2)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.18)$$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell(R2)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{vmatrix} X_{1-2}^{1(R1)} \\ Y_{1-2}^{1(R1)} \\ Z_{1-2}^{1(R1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \begin{vmatrix} X_{1-2}^{1(R2)} \\ Y_{1-2}^{1(R2)} \\ Z_{1-2}^{1(R2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -dZ_{1-2}^{1(R2)} \\ dY_{1-2}^{1(R2)} \end{vmatrix} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.19)$$

$$\text{donc } \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell(R2)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{vmatrix} X_{1-2}^{1(R1+R2)} \\ Y_{1-2}^{1(R1+R2)} \\ Z_{1-2}^{1(R1+R2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -dZ_{1-2}^{1(R2)} \\ dY_{1-2}^{1(R2)} \end{vmatrix} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (4.20)$$

Ce qui explique le choix de la liaison pivot, pour modéliser la liaison mécanique entre l'arbre d'entrée et les galets de pression, dans l'exemple de la pompe péristaltique.

À la lumière de ce qui précède, quelques lignes directrices, pour modéliser une liaison réalisée par l'intermédiaire de composants technologiques, peuvent être émises. En tout premier lieu, il faut évaluer la pertinence de discrétiser le problème. Ensuite, à partir des caractéristiques techniques des composants technologiques, et de la nature des efforts extérieurs qu'ils doivent assumer, des hypothèses peuvent être avancées. En fonction de ces hypothèses, il est généralement possible de modéliser les liaisons, suite à quoi les

règles de composition des liaisons peuvent servir pour trouver la liaison équivalente, dans le cas où la liaison réalisée par le composant technologique est composée d'un ensemble de liaisons en série et en parallèle.

#### **4.2 Liaison réalisée par contact entre deux pièces**

Dans le cas de la modélisation des liaisons réalisées par contact entre deux pièces, certains facteurs, relatifs à la qualité du contact et à la répartition des pressions de contact, doivent être pris en considération. Par exemple, le modèle de liaison représentant, à première vue, la liaison entre deux engrenages cylindriques droits, est une linéaire rectiligne. Cependant, selon l'usure, la largeur des dentures et les défauts d'alignement, il se peut que celles-ci se retrouvent en contact par un seul point. Par conséquent, une liaison ponctuelle serait plus appropriée pour modéliser cette liaison. De surcroît, l'étude statique s'en trouve simplifiée, de par la suppression d'une inconnue de liaison. Il faut donc, lors de la modélisation d'une liaison par contact entre deux pièces, tenir compte de tous les facteurs pouvant influencer le contact.

## CHAPITRE V

### VARIATEUR DE VITESSE

Pour faciliter la compréhension de la méthodologie de spécification du tolérancement géométrique mise en place au chapitre III, les exemples choisis pour illustrer la méthode (le moteur à explosion et la pompe à corps déformable), l'ont été en raison de leur faible niveau de complexité. À ce point, afin d'évaluer le potentiel de la démarche sur des mécanismes plus compliqués, l'étude du variateur de vitesse, montré à la figure 5.1, est réalisée. Les caractéristiques principales de ce système mécanique sont une puissance transmissible maximum de 4 CV, un couple résistant autorisé de 2.5 mdaN, une possibilité d'inversion du sens de rotation et un rapport de réduction de  $1/3 \leq r < \infty$ .

#### **Étape 1: Modélisation du mécanisme**

##### ***1.1) Identification des pièces intervenant dans la construction du mécanisme et compréhension de son fonctionnement***

En ce qui concerne le variateur de vitesse, il est possible de distinguer une partie commande et une partie opérative. La partie commande permet de fixer le rapport de vitesse, entre l'arbre d'entrée (1) et l'arbre de sortie (30), à une valeur donnée. Le réglage est effectué manuellement en actionnant le volant (16), sur lequel est fixée une vis sans fin (15). Dans sa rotation, cette dernière entraîne la roue (20) et le pignon de la crémaillère (21), tous deux solidaires du même arbre (17). Le pignon (21) modifie la position de la crémaillère (14), et par conséquent celle de l'anneau (13). La position relative de cet anneau de contrôle (13) et des cônes de transmission (7) caractérise le rapport de vitesse du variateur.



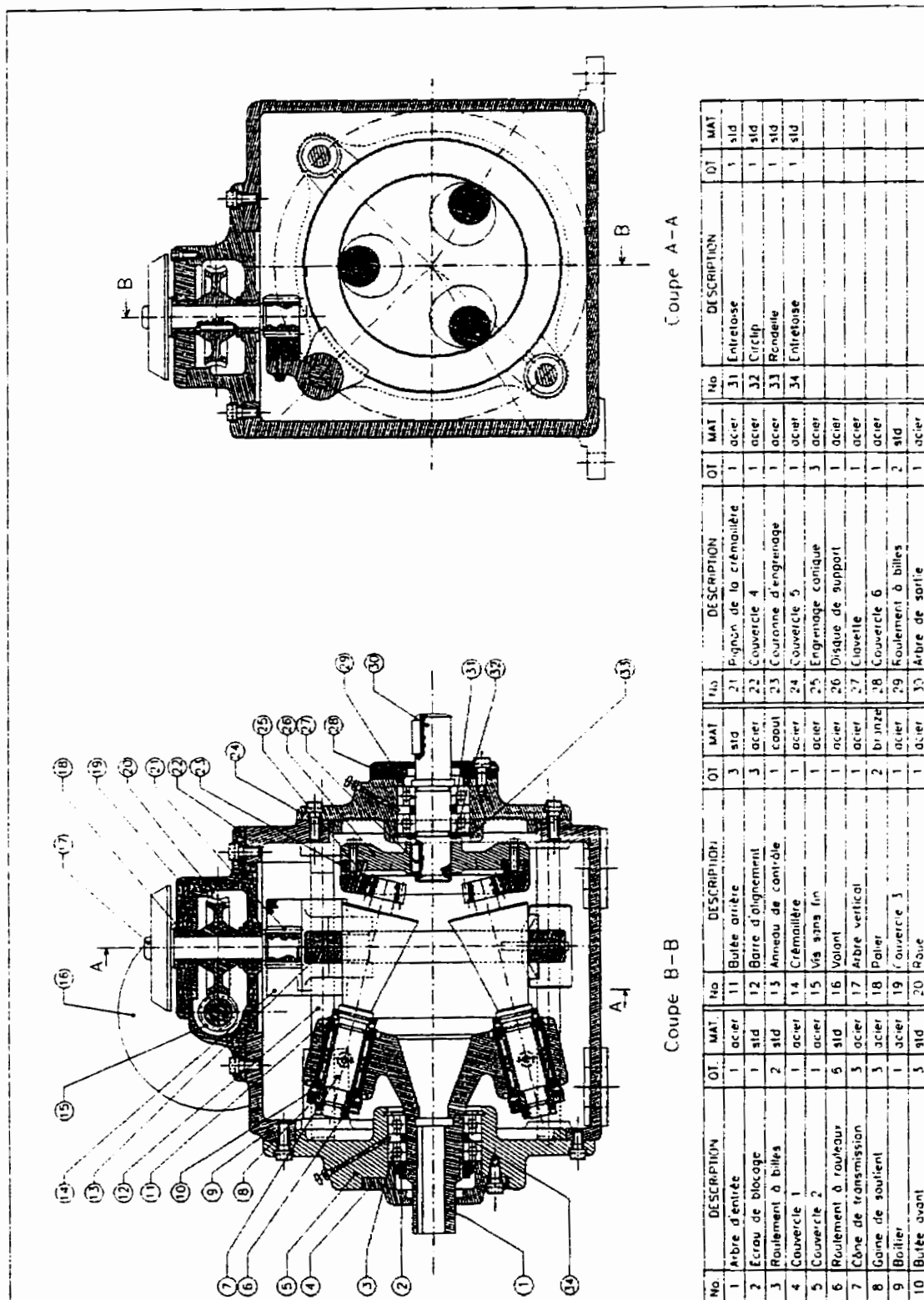


Figure 5.1: Dessin d'ensemble du variateur de vitesse

La partie opérative concrétise le rapport de vitesse exigé. L'arbre d'entrée (1), entraîné par un moteur, met en mouvement les cônes de transmission (7). La friction entre ces cônes (7) et l'anneau de contrôle (13) occasionne, en plus de leur rotation associée à celle de l'arbre d'entrée (1), une rotation dans le sens contraire, autour de leur axe principal. Le mouvement résultant des deux précédents est alors transmis à l'arbre de sortie (30), par l'intermédiaire d'engrenages coniques (25) situés à l'extrémité des cônes de transmission (7). En l'absence de frottement entre les cônes (7) et l'anneau de contrôle (13), aucun mouvement n'est transmis à l'arbre de sortie (30). Il s'agit donc ici d'un frottement utile, lequel doit être considéré dans la modélisation du mécanisme.

L'analyse qui suit concerne exclusivement la partie opérative du variateur de vitesse. Aussi, toute la partie commande sera considérée comme fixe par rapport au boîtier. De plus, en raison de la symétrie du mécanisme, un seul des trois cônes de transmissions (7) est considéré. Le tolérancement géométrique obtenu pour celui-ci s'appliquant, bien entendu, directement aux deux autres.

### ***1.2) Regroupement des éléments en contact n'entretenant aucun mouvement relatif***

Compte tenu de ce qui précède, il est possible de regrouper les éléments en contact, n'entretenant aucun mouvement relatif, en quatre entités distinctes. Il s'agit des groupes boîtier [0], arbre d'entrée [1], cône de transmission [2] et arbre de sortie [3].

#### **Regroupement [0]**

- Le couvercle 1 (4) est vissé dans le couvercle 2 (5), lequel est lui-même immobilisé par rapport au boîtier (9) au moyen de quatre vis.
- De même, le couvercle 3 (19) est fixé dans le couvercle 4 (22), lequel est à son tour ancré dans le boîtier (9).

- Pareillement, le couvercle 6 (28) est assemblé au couvercle 5 (24), lui même fixé au boîtier (9) avec quatre vis.
- Les trois barres d'alignement (12) sont ancrées dans le boîtier (9).

Le boîtier (9), les six couvercles (4, 5, 19, 22, 24 et 28) et les barres d'alignement (12) étant complètement immobiles les uns par rapport aux autres, ils peuvent tous être regroupés en une seule et même entité. Ce regroupement sera dorénavant appelé boîtier et identifié par le nombre [0]. À noter, que puisque les pièces constituant la partie commande (13, 14, 15, 16, 17, 20 et 21) sont supposées fixes par rapport au boîtier, elles doivent être considérées comme faisant partie de ce groupe.

#### Regroupement [1]

- Aucune pièce, autre que certains composants technologiques de liaison, n'étant immobile par rapport à l'arbre d'entrée (1), celui-ci constituera directement le groupe arbre d'entrée [1].

#### Regroupement [2]

- Le cône de transmission (7), à même lequel est usiné l'engrenage conique (25), correspondra au groupe [2]. Ce groupe sera appelé cône de transmission.

#### Regroupement [3]

- La couronne d'engrenage (23) est vissée sur le disque de support (26), lequel est immobilisé sur l'arbre de sortie (30), en rotation, au moyen d'une clavette (27), et en translation, par des composants technologiques de liaisons (29, 31, 32, 33). Puisque aucun mouvement relatif n'a lieu entre ces pièces, il est possible de les considérer

comme une seule entité. Cet ensemble sera appelé arbre de sortie et identifié par le nombre [3].

Le graphe des liaisons obtenu suite à ces regroupements est donné à la figure 5.2. Le couple d'entrée ( $C_e$ ) provenant du moteur, et le couple de sortie ( $C_s$ ) correspondant au couple résistant sur l'arbre de sortie, y sont également indiqués.

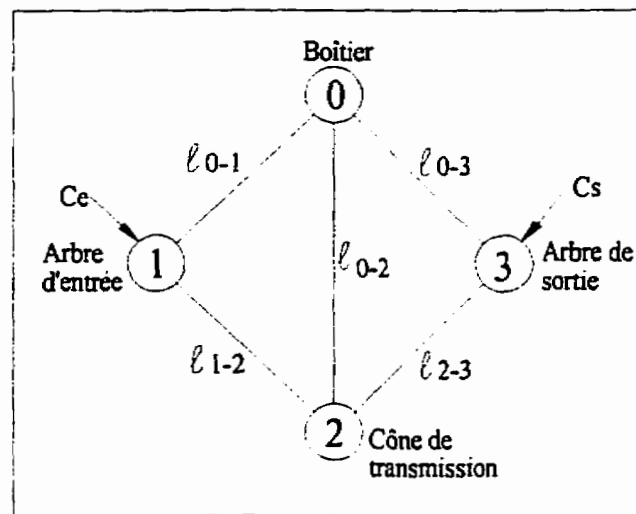


Figure 5.2: Graphe des liaisons de la partie opérative du variateur de vitesse

### 1.3) Détermination du modèle de liaison cinématique correspondant à chacune des liaisons mécaniques dans le mécanisme

#### Liaison $\ell_{0-1}$

Entre le groupe arbre d'entrée [1] et le groupe boîtier [0], il y a deux roulements rigides à billes. Ces roulements font en sorte que l'arbre d'entrée [1] et le boîtier [0] conservent en permanence une droite en commun, mais ne permettent pas de mouvement relatif le long de cette droite. Le modèle de liaison cinématique correspondant à la liaison mécanique engendrée par ces deux roulements est une liaison pivot.

### Liaison $\mathcal{L}_{0-3}$

Entre les groupes arbre de sortie [3] et boîtier [0] se trouve également deux roulements rigides à billes. Les mouvements relatifs entre l'arbre de sortie [3] et le boîtier [0], permis par ces roulements, sont identiques au cas précédent, soit une rotation autour de l'axe commun. Le modèle de liaison cinématique correspondant à la liaison mécanique engendrée par ces deux roulements est par conséquent elle aussi une liaison pivot.

### Liaison $\mathcal{L}_{1-2}$

Entre l'arbre d'entrée [1] et le cône de transmission [2], il y a deux roulements à rouleaux, une butée avant et une butée arrière. Ces composants technologiques font en sorte que les groupes arbre d'entrée [1] et cône de transmission [2] conservent en permanence une droite en commun, mais ne permettent pas de mouvement relatif le long de cette droite. Le modèle de liaison cinématique correspondant à la liaison mécanique engendrée par ces éléments de liaisons est une liaison pivot.

### Liaison $\mathcal{L}_{0-2}$

Le groupe cône de transmission [2] et le groupe boîtier [0], au cours de leurs déplacements relatifs possibles, conservent en permanence un point en commun pouvant se déplacer sur au moins l'un deux. Le modèle de liaison cinématique correspondant le mieux à la liaison entre ces deux groupes est, par conséquent, une liaison ponctuelle. Cependant, à cause du frottement, indispensable à la transmission du mouvement vers l'arbre de sortie, il faut ajouter dans le torseur associé à cette liaison ponctuelle, un terme représentant le blocage du mouvement de translation, dû à ce dernier.

### Liaison $\mathcal{L}_{2-3}$

Considérant la qualité du contact entre le cône de transmission [2] et l'arbre de sortie [3], le modèle de liaison cinématique le plus approprié est une linéaire rectiligne. En effet, au

cours de leurs déplacements relatifs, ces groupes conservent une droite en commun susceptible de se déplacer sur au moins l'un d'eux.

Compte tenu de ce qui précède, il est possible de construire le schéma cinématique de la partie commande du variateur de vitesse, lequel est donné à la figure 5.3.

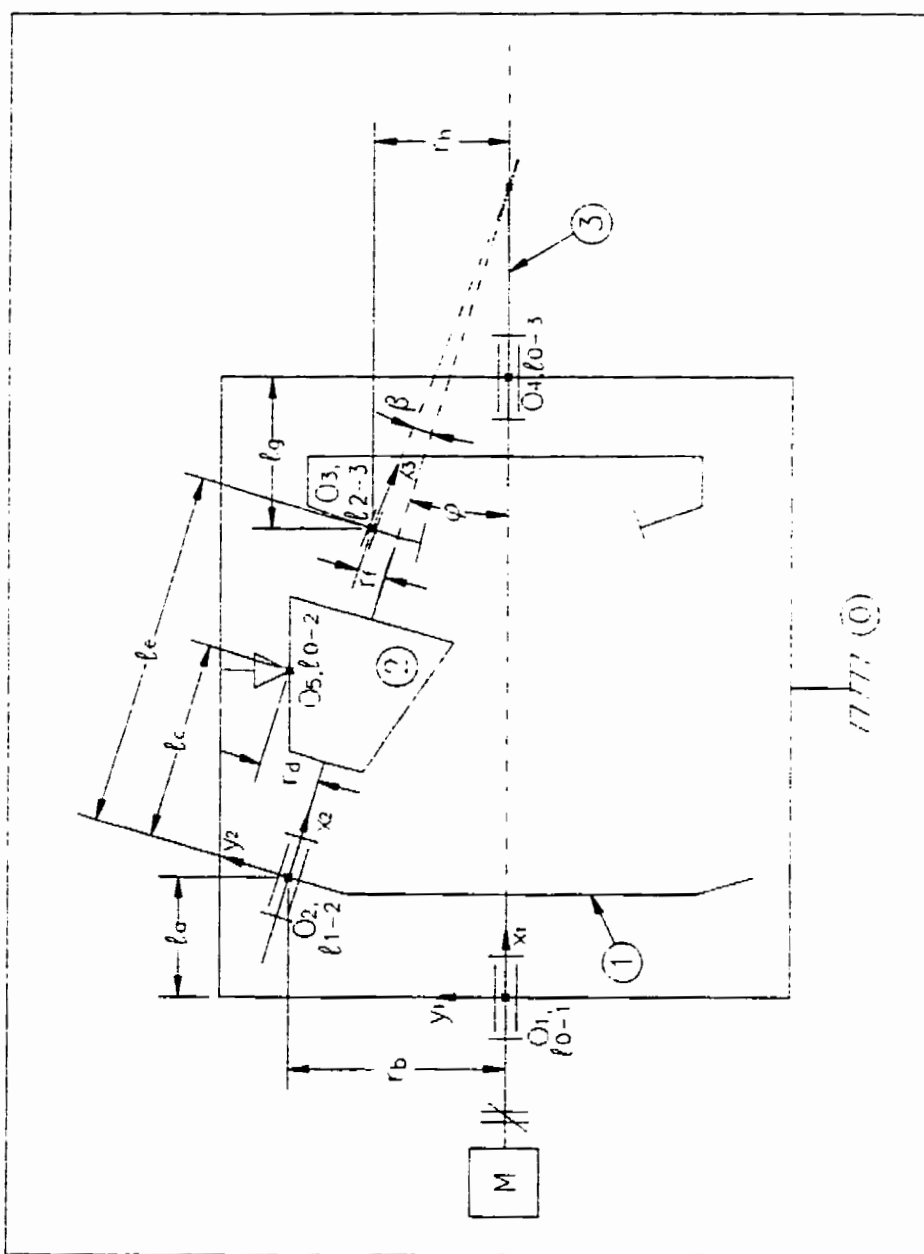


Figure 5.3: Schéma cinématique du variateur de vitesse

**1.4) Identification des torseurs statiques correspondant à chacune des liaisons dans un repère local propre à la liaison**

$\ell_{0-1}$ : Liaison pivot d'axe  $x_1$ , d'origine  $O_1$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{0-1}^1 & 0 \\ Y_{0-1}^1 & M_{0-1}^1 \\ Z_{0-1}^1 & N_{0-1}^1 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (5.1)$$

$\ell_{1-2}$ : Liaison pivot d'axe  $x_2$ , d'origine  $O_2$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-2}^2 & 0 \\ Y_{1-2}^2 & M_{1-2}^2 \\ Z_{1-2}^2 & N_{1-2}^2 \end{array} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} \quad (5.2)$$

$\ell_{0-2}$ : Liaison ponctuelle avec frottement d'axe  $y_1$ , d'origine  $O_5$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_5, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{0-2}^1 & 0 \\ f(Y_{0-2}^1) & 0 \end{array} \right\}_{O_5, x_1 y_1 z_1} \quad (5.3)$$

$\ell_{0-3}$ : Liaison pivot d'axe  $x_1$ , d'origine  $O_4$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 3)}^{\ell_{0-3}} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{0-3}^1 & 0 \\ Y_{0-3}^1 & M_{0-3}^1 \\ Z_{0-3}^1 & N_{0-3}^1 \end{array} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} \quad (5.4)$$

$\ell_{2-3}$ : Liaison linéaire rectiligne d'axe  $x_3$ , d'origine  $O_3$

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{\ell_{2-3}} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & M_{2-3}^3 \\ Z_{2-3}^3 & 0 \end{array} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3} \quad (5.5)$$

## **Étape 2: Analyse hyperstatique**

### **2.1) Analyse du degré d'hyperstatisme**

Selon la modélisation du mécanisme réalisée, le variateur de vitesse comprend, avec le boîtier, quatre groupes. L'application du principe fondamental de la statique à chacun d'eux, excepté le boîtier [0], conduit à:

$$6(4 - 1) = 18 \text{ équations statiques (Es)} \quad (5.6)$$

À partir des torseurs statiques correspondant à chacune des liaisons, il est possible d'identifier:

$$5 + 5 + 1 + 5 + 2 = 18 \text{ inconnues statiques (Is)} \quad (5.7)$$

Le degré d'hyperstatisme se calcule alors à l'aide de la formule:

$$m_s = m - m_c \quad (5.8)$$

$$\text{avec } m = Es - Is = 18 - 18 = 0 \quad (5.9)$$

$$\text{et } m_c = m_c^{\text{int}} + m_c^{\text{ext}} \quad (5.10)$$

Le mécanisme comportant une mobilité cinématique externe, le mouvement de rotation de l'arbre d'entrée autour de l'axe  $x_1$ , et une mobilité cinématique interne, le mouvement de rotation du cône autour de son axe principal  $x_2$ , le nombre de mobilité cinématique total est donc égal à:

$$m_c = m_c^{\text{int}} + m_c^{\text{ext}} = 1 + 1 = 2 \quad (5.11)$$

Ce qui permet de déterminer le nombre de sources d'hyperstatisme, lequel correspond au nombre d'inconnues principales du système d'équations résultant de l'application du principe fondamental de la statique aux pièces ou sous-ensembles du mécanisme:

$$m_s = m - m_c = 0 - 2 = -2 \quad (5.12)$$

$\Rightarrow$  2 sources d'hyperstatismes



## 2.2) Analyse statique

L'analyse du degré d'hyperstatisme a révélé l'existence de deux sources d'hyperstatisme à l'intérieur du système mécanique étudié. Dans le but d'évaluer leurs répercussions sur chacun des groupes, l'équilibre des sous-ensembles [1], [2] et [3] est réalisé.

### 2.2.1) Équilibre du groupe arbre d'entrée [1]

#### a - Choix du repère groupe

Le graphe des liaisons du variateur de vitesse (figure 5.2, page 99) montre que le groupe arbre d'entrée [1] est contraint par les liaisons pivot  $\ell_{0-1}$  et  $\ell_{1-2}$ , et est soumis au torseur d'efforts extérieurs  $\{\tau_{(ext \rightarrow 1)}\}$ . Ce dernier correspond au couple appliqué par le moteur sur l'arbre d'entrée (1).

Les conditions relatives à la construction du référentiel local associé à une liaison pivot stipulent qu'un des axes doit être orienté selon l'axe de rotation (tableau 2.2, page 15). Comme les axes de rotation des liaisons  $\ell_{0-1}$  et  $\ell_{1-2}$  ( $x_1$  et  $x_2$ , figure 5.3) sont inclinés l'un par rapport à l'autre, il est impossible d'orienter leurs référentiels locaux de la même manière. Il faut donc choisir le référentiel local associé à la liaison  $\ell_{0-1}$  ou celui associé à la liaison  $\ell_{1-2}$  comme repère groupe. Puisqu'il s'agit de deux liaisons pivot, le choix de l'un ou l'autre est arbitraire. Il en est d'ailleurs de même concernant l'origine du repère groupe. Toutefois, comme le couple extérieur agit directement autour de  $x_1$ , le référentiel  $O_1, x_1 y_1 z_1$  sera préféré. Aussi, pour exprimer le torseur de la liaison  $\ell_{1-2}$  dans le repère local, il faudra effectuer un changement de base ( $x_2 y_2 z_2 \rightarrow x_1 y_1 z_1$ ), et un transport ( $O_2, x_1 y_1 z_1 \rightarrow O_1, x_1 y_1 z_1$ ).

Liaison  $\ell_{0-1}$ Torseur des efforts extérieurs  
agissant sur l'arbre d'entrée [1]

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{\ell_{0-1}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{0-1}^1 & 0 \\ Y_{0-1}^1 & M_{0-1}^1 \\ Z_{0-1}^1 & N_{0-1}^1 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (5.13) \quad \left\{ \tau_{(ext \rightarrow 1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & Ce \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (5.14)$$

Liaison  $\ell_{1-2}$ 

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = [Rz_2] \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \quad (5.15)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-2}^2 & 0 \\ Y_{1-2}^2 & M_{1-2}^2 \\ Z_{1-2}^2 & N_{1-2}^2 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1-2}^2 \cos \varphi + Y_{1-2}^2 \sin \varphi & M_{1-2}^2 \sin \varphi \\ -X_{1-2}^2 \sin \varphi + Y_{1-2}^2 \cos \varphi & M_{1-2}^2 \cos \varphi \\ Z_{1-2}^2 & N_{1-2}^2 \end{array} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2}$$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \Rightarrow \bar{R}_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} = \begin{vmatrix} X_{1-2}^2 \cos \varphi + Y_{1-2}^2 \sin \varphi \\ -X_{1-2}^2 \sin \varphi + Y_{1-2}^2 \cos \varphi \\ Z_{1-2}^2 \end{vmatrix} \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{(O_1, 1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} = \bar{M}_{(O_2, 1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} + \bar{R}_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \wedge \vec{O_2 O_1}$$

$$= \begin{vmatrix} M_{1-2}^2 \sin \varphi & X_{1-2}^2 \cos \varphi + Y_{1-2}^2 \sin \varphi & -\ell_a \\ M_{1-2}^2 \cos \varphi & -X_{1-2}^2 \sin \varphi + Y_{1-2}^2 \cos \varphi & -r_b \\ N_{1-2}^2 & Z_{1-2}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} M_{1-2}^2 \sin \varphi + r_b Z_{1-2}^2 \\ M_{1-2}^2 \cos \varphi - \ell_a Z_{1-2}^2 \\ N_{1-2}^2 - r_b X_{1-2}^2 \cos \varphi - r_b Y_{1-2}^2 \sin \varphi - \ell_a X_{1-2}^2 \sin \varphi + \ell_a Y_{1-2}^2 \cos \varphi \end{vmatrix}$$

### c - Équilibre statique

Le principe fondamental de la statique appliqué au groupe l'arbre d'entrée [1] s'écrit donc:

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)}^{1-2} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{0-1} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(ext \rightarrow 1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \{\bar{0}\} \quad (5.17)$$

$$-\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{1-2} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)}^{0-1} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(ext \rightarrow 1)} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \{\bar{0}\} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} & - \left\{ \begin{array}{c} X_{1-2}^2 \cos \varphi + Y_{1-2}^2 \sin \varphi \\ -X_{1-2}^2 \sin \varphi + Y_{1-2}^2 \cos \varphi \\ Z_{1-2}^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} M_{1-2}^2 \sin \varphi + r_b Z_{1-2}^2 \\ M_{1-2}^2 \cos \varphi - \ell_s Z_{1-2}^2 \\ N_{1-2}^2 - r_b X_{1-2}^2 \cos \varphi - r_b Y_{1-2}^2 \sin \varphi - \ell_s X_{1-2}^2 \sin \varphi + \ell_s Y_{1-2}^2 \cos \varphi \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} \\ & + \left\{ \begin{array}{c} X_{0-1}^1 \\ Y_{0-1}^1 \\ Z_{0-1}^1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ M_{0-1}^1 \\ N_{0-1}^1 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} Ce \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_1, x_1 y_1 z_1} = \{\bar{0}\} \quad (5.19) \end{aligned}$$

Soit au bilan:

$$\begin{aligned} X_{0-1}^1 - X_{1-2}^2 \cos \varphi - Y_{1-2}^2 \sin \varphi &= 0 & -M_{1-2}^2 \sin \varphi - r_b Z_{1-2}^2 + Ce &= 0 \\ Y_{0-1}^1 + X_{1-2}^2 \sin \varphi - Y_{1-2}^2 \cos \varphi &= 0 & M_{0-1}^1 - M_{1-2}^2 \cos \varphi + \ell_s Z_{1-2}^2 &= 0 \\ Z_{0-1}^1 - Z_{1-2}^2 &= 0 & N_{0-1}^1 - N_{1-2}^2 + r_b X_{1-2}^2 \cos \varphi + r_b Y_{1-2}^2 \sin \varphi &+ \ell_s X_{1-2}^2 \sin \varphi - \ell_s Y_{1-2}^2 \cos \varphi = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

### d - Conclusion

À partir du bilan, il est possible de constater des hyperstatismes de translation sur tous les axes, et de moment suivant les axes y et z. En effet, concernant le moment autour de x,  $r_b Z_{1-2}^2$  est un terme induit, et (Ce) n'est pas une cause d'hyperstatisme.

## 2.2.2) Équilibre du groupe arbre de sortie [3]

### a - Choix du repère groupe

Le graphe des liaisons du variateur de vitesse (figure 5.2, page 99) montre que le groupe arbre de sortie [3] est contraint par les liaisons  $\ell_{0-3}$  et  $\ell_{2-3}$ . Ces liaisons correspondent

respectivement à une liaison pivot et à une liaison linéaire rectiligne. Le groupe arbre de sortie [3] est également soumis au torseur d'efforts extérieurs  $\{\tau_{(ext \rightarrow 3)}\}$  représentant le couple résistant agissant sur l'arbre de sortie (30).

La nature des liaisons impliquées dans l'équilibre du groupe arbre de sortie [3] est telle que leurs référentiels locaux ne peuvent être orientés de la même façon. Comme la liaison pivot  $\ell_{0-3}$  comporte le plus d'inconnues statiques, le référentiel local qui lui est associé, soit  $O_4, x_1, y_1, z_1$  est choisi comme repère groupe.

### ***b - Expression des torseurs dans le repère groupe***

Liaison  $\ell_{0-3}$

Torseur des efforts extérieurs  
agissant sur l'arbre de sortie [3]

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 3)}' \right\}_{O_4, x_1, y_1, z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{0-3}^1 & 0 \\ Y_{0-3}^1 & M_{0-3}^1 \\ Z_{0-3}^1 & N_{0-3}^1 \end{array} \right\}_{O_4, x_1, y_1, z_1} \quad (5.21) \quad \left\{ \tau_{(ext \rightarrow 3)} \right\}_{O_4, x_1, y_1, z_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & Cs \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O_4, x_1, y_1, z_1} \quad (5.22)$$

liaison  $\ell_{2-3}$

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}' \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} = [Rz_1(\gamma = \varphi + \beta)] [Rx_3(\text{angle de pression } \alpha)] \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}' \right\}_{O_3, x_3, y_3, z_3} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}' \right\}_{O_3, x_3, y_3, z_3} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \cos \alpha & -\sin \gamma \sin \alpha \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & M_{2-3}^3 \\ Z_{2-3}^3 & 0 \end{array} \right\}_{O_3, x_3, y_3, z_3} \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} -Z_{2-3}^3 \sin \gamma \sin \alpha & M_{2-3}^3 \sin \gamma \cos \alpha \\ -Z_{2-3}^3 \cos \gamma \sin \alpha & M_{2-3}^3 \cos \gamma \cos \alpha \\ Z_{2-3}^3 \cos \alpha & M_{2-3}^3 \sin \alpha \end{array} \right\}_{O_1, x_1, y_1, z_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} &\Rightarrow \bar{R}_{(2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} = \begin{vmatrix} -Z_{2-3}^3 \sin \gamma \sin \alpha \\ -Z_{2-3}^3 \cos \gamma \sin \alpha \\ Z_{2-3}^3 \cos \gamma \end{vmatrix} \quad (5.24) \\
\Rightarrow \bar{M}_{(O_4, 2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} &= \bar{M}_{(O_3, 2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} + \bar{R}_{(2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} \wedge \overrightarrow{O_3 O_4} \\
&= \begin{vmatrix} M_{2-3}^3 \sin \gamma \cos \alpha & -Z_{2-3}^3 \sin \gamma \sin \alpha & \ell_g \\ M_{2-3}^3 \cos \gamma \cos \alpha & -Z_{2-3}^3 \cos \gamma \sin \alpha & -r_h \\ M_{2-3}^3 \sin \alpha & Z_{2-3}^3 \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} M_{2-3}^3 \sin \gamma \cos \alpha + r_h Z_{2-3}^3 \cos \alpha \\ M_{2-3}^3 \cos \gamma \cos \alpha + \ell_g Z_{2-3}^3 \cos \alpha \\ M_{2-3}^3 \sin \alpha + r_h Z_{2-3}^3 \sin \gamma \sin \alpha + \ell_g Z_{2-3}^3 \cos \gamma \sin \alpha \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

### c - Équilibre statique

Le principe fondamental de la statique pour ce sous-ensemble s'écrit donc:

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 3)}^{e_{0-3}} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{e_{2-3}} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \tau_{(ext \rightarrow 3)} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} = \{\bar{0}\} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{vmatrix} -Z_{2-3}^3 \sin \gamma \sin \alpha & M_{2-3}^3 \sin \gamma \cos \alpha + r_h Z_{2-3}^3 \cos \alpha \\ -Z_{2-3}^3 \cos \gamma \sin \alpha & M_{2-3}^3 \cos \gamma \cos \alpha + \ell_g Z_{2-3}^3 \cos \alpha \\ Z_{2-3}^3 \cos \alpha & M_{2-3}^3 \sin \alpha + r_h Z_{2-3}^3 \sin \gamma \sin \alpha + \ell_g Z_{2-3}^3 \cos \gamma \sin \alpha \end{vmatrix} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} \\
&+ \left\{ \begin{vmatrix} X_{0-3}^1 & 0 \\ Y_{0-3}^1 & M_{0-3}^1 \\ Z_{0-3}^1 & N_{0-3}^1 \end{vmatrix} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} + \left\{ \begin{vmatrix} 0 & Cs \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right\}_{O_4, x_1 y_1 z_1} = \{\bar{0}\} \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Soit au bilan:

$$\begin{aligned}
X_{0-3}^1 - Z_{2-3}^3 \sin \gamma \sin \alpha &= 0 & M_{2-3}^3 \sin \gamma \cos \alpha + r_h Z_{2-3}^3 \cos \alpha + Cs &= 0 \\
Y_{0-3}^1 - Z_{2-3}^3 \cos \gamma \sin \alpha &= 0 & M_{0-3}^1 + M_{2-3}^3 \cos \gamma \cos \alpha + \ell_g Z_{2-3}^3 \cos \alpha &= 0 \\
Z_{0-3}^1 + Z_{2-3}^3 \cos \alpha &= 0 & N_{0-3}^1 + M_{2-3}^3 \sin \alpha + r_h Z_{2-3}^3 \sin \gamma \sin \alpha + \ell_g Z_{2-3}^3 \cos \gamma \sin \alpha &= 0
\end{aligned} \quad (5.27)$$

### d - Conclusion

Les résultats du bilan permettent d'observer des hyperstatismes de translation sur tous les axes, et de moment sur les axes y et z.

### 2.2.3) Équilibre du groupe cône de transmission [2]

#### a - Choix du repère groupe

Tel qu'illustré à la figure 5.2, le groupe cône de transmission [2] est contraint par la liaison ponctuelle  $\ell_{0-2}$ , la liaison pivot  $\ell_{1-2}$  et la liaison linéaire rectiligne  $\ell_{2-3}$ . Comme il est impossible d'orienter les référentiels locaux associés à ces liaisons de la même manière, le référentiel local de la liaison comportant le plus d'inconnues statique,  $\ell_{1-2}$ , est choisi pour repère groupe, soit:  $O_2, x_2 y_2 z_2$ .

#### b - Expression des torseurs dans le repère groupe

liaison  $\ell_{2-3}$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{(2-3)} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3} &= [Rz_2] [Rx_3 (\text{angle de pression } \alpha)] \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{(2-3)} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{(2-3)} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \cos \alpha & -\sin \beta \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \cos \alpha & -\cos \beta \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ Z_{2-3}^3 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ M_{2-3}^3 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} -Z_{2-3}^3 \sin \beta \sin \alpha \\ -Z_{2-3}^3 \cos \beta \sin \alpha \\ Z_{2-3}^3 \cos \alpha \end{array} \middle| \begin{array}{c} M_{2-3}^3 \sin \beta \cos \alpha \\ M_{2-3}^3 \cos \beta \cos \alpha \\ M_{2-3}^3 \sin \alpha \end{array} \right\}_{O_3, x_3 y_3 z_3}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{\ell_{2-3}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} \Rightarrow \bar{R}_{(2 \rightarrow 3)}^{\ell_{2-3}} = \begin{vmatrix} -Z_{2-3}^3 \sin \beta \sin \alpha \\ -Z_{2-3}^3 \cos \beta \sin \alpha \\ Z_{2-3}^3 \cos \alpha \end{vmatrix} \quad (5.29)$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{(O_2, 2 \rightarrow 3)}^{\ell_{2-3}} = \bar{M}_{(O_3, 2 \rightarrow 3)}^{\ell_{2-3}} + \bar{R}_{(2 \rightarrow 3)}^{\ell_{2-3}} \wedge \overrightarrow{O_3 O_2}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} M_{2-3}^3 \sin \beta \cos \alpha \\ M_{2-3}^3 \cos \beta \cos \alpha \\ M_{2-3}^3 \sin \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -Z_{2-3}^3 \sin \beta \sin \alpha \\ -Z_{2-3}^3 \cos \beta \sin \alpha \\ Z_{2-3}^3 \cos \alpha \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\ell_e \\ -r_f \\ 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} M_{2-3}^3 \sin \beta \cos \alpha + r_f Z_{2-3}^3 \cos \alpha \\ M_{2-3}^3 \cos \beta \cos \alpha - \ell_e Z_{2-3}^3 \cos \alpha \\ M_{2-3}^3 \sin \alpha + r_f Z_{2-3}^3 \sin \beta \sin \alpha - \ell_e Z_{2-3}^3 \cos \beta \sin \alpha \end{vmatrix} \end{aligned}$$

liaison  $\ell_{1-2}$

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = \left\{ \begin{vmatrix} X_{1-2}^2 \\ Y_{1-2}^2 \\ Z_{1-2}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ M_{1-2}^2 \\ N_{1-2}^2 \end{vmatrix} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} \quad (5.30)$$

liaison  $\ell_{0-2}$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_3, x_2 y_2 z_2} = [R_{Z_5}] \left\{ \tau_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_3, x_1 y_1 z_1} \quad (5.31)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{0-2}^1 \\ f(Y_{0-2}^1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}_{O_3, x_1 y_1 z_1}$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} -Y_{0-2}^1 \sin \varphi \\ Y_{0-2}^1 \cos \varphi \\ f(Y_{0-2}^1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}_{O_3, x_2 y_2 z_2}$$

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} \Rightarrow \bar{R}_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} = \begin{vmatrix} -Y_{0-2}^1 \sin \varphi \\ Y_{0-2}^1 \cos \varphi \\ f(Y_{0-2}^1) \end{vmatrix} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{M}_{(O_2, 0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} &= \vec{M}_{(O_2, 0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} + \vec{R}_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \wedge \vec{O_3 O_2} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -Y_{0-2}^1 \sin \varphi & -\ell_c \\ 0 & Y_{0-2}^1 \cos \varphi & -r_d \\ 0 & f(Y_{0-2}^1) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} r_d f(Y_{0-2}^1) \\ -\ell_c f(Y_{0-2}^1) \\ r_d Y_{0-2}^1 \sin \varphi + \ell_c Y_{0-2}^1 \cos \varphi \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

### c - Équilibre statique

Le principe fondamental de la statique pour ce composant s'écrit donc:

$$\left\{ \tau_{(3 \rightarrow 2)}^{\ell_{2-3}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} + \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} + \left\{ \tau_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = \{\vec{0}\} \quad (5.33)$$

$$-\left\{ \tau_{(2 \rightarrow 3)}^{\ell_{2-3}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} + \left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)}^{\ell_{1-2}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} + \left\{ \tau_{(0 \rightarrow 2)}^{\ell_{0-2}} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = \{\vec{0}\} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \begin{vmatrix} -Z_{2-3}^3 \sin \beta \sin \alpha & M_{2-3}^3 \sin \beta \cos \alpha + r_f Z_{2-3}^3 \cos \alpha \\ -Z_{2-3}^3 \cos \beta \sin \alpha & M_{2-3}^3 \cos \beta \cos \alpha - \ell_c Z_{2-3}^3 \cos \alpha \\ Z_{2-3}^3 \cos \alpha & M_{2-3}^3 \sin \alpha + r_f Z_{2-3}^3 \sin \beta \sin \alpha - \ell_c Z_{2-3}^3 \cos \beta \sin \alpha \end{vmatrix} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} + \\
& \left\{ \begin{vmatrix} X_{1-2}^2 & 0 \\ Y_{1-2}^2 & M_{1-2}^2 \\ Z_{1-2}^2 & N_{1-2}^2 \end{vmatrix} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} + \left\{ \begin{vmatrix} -Y_{0-2}^1 \sin \varphi & r_d f(Y_{0-2}^1) \\ Y_{0-2}^1 \cos \varphi & -\ell_c f(Y_{0-2}^1) \\ f(Y_{0-2}^1) & r_d Y_{0-2}^1 \sin \varphi + \ell_c Y_{0-2}^1 \cos \varphi \end{vmatrix} \right\}_{O_2, x_2 y_2 z_2} = \{\vec{0}\} \quad (5.35)
\end{aligned}$$

Soit au bilan:

$$\begin{aligned}
Z_{2-3}^3 \sin \beta \sin \alpha + X_{1-2}^2 - Y_{0-2}^1 \sin \varphi &= 0 \\
Z_{2-3}^3 \cos \beta \sin \alpha + Y_{1-2}^2 - Y_{0-2}^1 \cos \varphi &= 0 \\
-Z_{2-3}^3 \cos \alpha + Z_{1-2}^2 - f(Y_{0-2}^1) &= 0 \\
-M_{2-3}^3 \sin \beta \cos \alpha - r_f Z_{2-3}^3 \cos \alpha + r_d f(Y_{0-2}^1) &= 0 \\
-M_{2-3}^3 \cos \beta \cos \alpha + \ell_c Z_{2-3}^3 \cos \alpha + M_{1-2}^2 - \ell_c f(Y_{0-2}^1) &= 0 \\
-M_{2-3}^3 \sin \alpha - r_f Z_{2-3}^3 \sin \beta \sin \alpha + \ell_c Z_{2-3}^3 \cos \beta \sin \alpha + N_{1-2}^2 + r_d Y_{0-2}^1 \sin \varphi + \ell_c Y_{0-2}^1 \cos \varphi &= 0
\end{aligned} \quad (5.36)$$



### d - Conclusion

D'après ce bilan, il est possible de constater des hyperstatismes partout, sauf de moment autour de l'axe des x.

### 2.2.4) Bilan global

Le bilan global, présenté ci-après, permet de vérifier que, comme prévu par l'analyse du degré d'hyperstatisme, il y a bien 2 sources d'hyperstatisme. Par exemple, la connaissance des variables  $Y_{0-2}$  et  $Z_{2-3}$  permet de déterminer toutes les autres inconnues du système. Quelles que soient ces sources d'hyperstatisme, elles se traduisent par des hyperstatismes de translation suivant les axes x, y et z, et de moment sur les axes y et z, sur chacun des groupes.

#### Équilibre du groupe arbre d'entrée [0]

$$\begin{aligned}
 X_{0-1}^1 - X_{1-2}^2 \cos \varphi - Y_{1-2}^2 \sin \varphi &= 0 & -M_{1-2}^2 \sin \varphi - bZ_{1-2}^2 + Ce &= 0 \\
 Y_{0-1}^1 + X_{1-2}^2 \sin \varphi - Y_{1-2}^2 \cos \varphi &= 0 & M_{0-1}^1 - M_{1-2}^2 \cos \varphi + aZ_{1-2}^2 &= 0 \\
 Z_{0-1}^1 - Z_{1-2}^2 &= 0 & N_{0-1}^1 - N_{1-2}^2 + bX_{1-2}^2 \cos \varphi + bY_{1-2}^2 \sin \varphi &= 0 \\
 & & +aX_{1-2}^2 \sin \varphi - aY_{1-2}^2 \cos \varphi &= 0
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

#### Équilibre du groupe arbre de sortie [3]

$$\begin{aligned}
 X_{0-3}^1 - Z_{2-3}^3 \sin \gamma \sin \alpha &= 0 & M_{2-3}^3 \sin \gamma \cos \alpha + r_h Z_{2-3}^3 \cos \alpha + Cs &= 0 \\
 Y_{0-3}^1 - Z_{2-3}^3 \cos \gamma \sin \alpha &= 0 & M_{0-3}^1 + M_{2-3}^3 \cos \gamma \cos \alpha + \ell_g Z_{2-3}^3 \cos \alpha &= 0 \\
 Z_{0-3}^1 + Z_{2-3}^3 \cos \alpha &= 0 & N_{0-3}^1 + M_{2-3}^3 \sin \alpha + r_h Z_{2-3}^3 \sin \gamma \sin \alpha + \ell_g Z_{2-3}^3 \cos \gamma \sin \alpha &= 0
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

#### Équilibre du cône de transmission [2]

$$\begin{aligned}
 Z_{2-3}^3 \sin \beta \sin \alpha + X_{1-2}^2 - Y_{0-2}^1 \sin \varphi &= 0 \\
 Z_{2-3}^3 \cos \beta \sin \alpha + Y_{1-2}^2 - Y_{0-2}^1 \cos \varphi &= 0 \\
 -Z_{2-3}^3 \cos \alpha + Z_{1-2}^2 - f(Y_{0-2}^1) &= 0 \\
 -M_{2-3}^3 \sin \beta \cos \alpha - r_f Z_{2-3}^3 \cos \alpha + r_d f(Y_{0-2}^1) &= 0 \\
 -M_{2-3}^3 \cos \beta \cos \alpha + \ell_e Z_{2-3}^3 \cos \alpha + M_{1-2}^2 - \ell_e f(Y_{0-2}^1) &= 0 \\
 -M_{2-3}^3 \sin \alpha - r_f Z_{2-3}^3 \sin \beta \sin \alpha + \ell_e Z_{2-3}^3 \cos \beta \sin \alpha + N_{1-2}^2 + r_d Y_{0-2}^1 \sin \varphi + \ell_e Y_{0-2}^1 \cos \varphi &= 0
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

### **Étape 3: Spécification du tolérancement géométrique**

#### ***3.1) Proposition des conditions fonctionnelles de position et d'orientation permettant de contrôler les hyperstatismes***

À partir des résultats de l'analyse statique effectuée précédemment, les conditions fonctionnelles nécessaires pour contrôler les effets des sources d'hyperstatisme sont déterminées.

##### ***3.1.1) Conditions fonctionnelles relatives au groupe arbre d'entrée [1]***

Les sources d'hyperstatisme engendrent sur le groupe arbre d'entrée [1] des hyperstatismes de translation suivant tous les axes, et de moment autour des axes y et z.

##### ***Hyperstatisme de translation en x***

Pour contrôler l'hyperstatisme de translation suivant x, il faut poser une cote tolérancée ( $T_1$ ) entre le point N, appartenant à l'axe du groupe cône de transmission [2], et la référence B, du groupe boîtier [0] (voir figure 5.4).

##### ***Hyperstatismes de translation en y et z***

Pour contrôler les défauts géométriques de position correspondant aux hyperstatismes de translation suivant y et z, l'axe de la partie du groupe cône de transmission [2], en relation avec l'arbre d'entrée [1], est d'abord positionné théoriquement par rapport à la référence A du groupe boîtier [0]. Ce même axe est ensuite affecté d'une tolérance géométrique de position sur le diamètre ( $T_2$ ). La référence A est ici choisie, car c'est elle qui est en relation avec le groupe arbre d'entrée [1].



### ***3.1.2) Conditions fonctionnelles relatives au groupe arbre de sortie [3]***

La façon d'indiquer les conditions fonctionnelles relatives au groupe arbre de sortie [3] est un peu particulière, car c'est l'engrenage conique (25), situé à l'extrémité du groupe cône de transmission [2], qui fait la liaison avec le groupe arbre de sortie [3]. De ce fait, le contrôle des hyperstatismes de translation et de moment passe par le contrôle de l'ouverture du cône propre à cet engrenage (25). Les caractéristiques de ce cône sont un angle d'ouverture de  $2\beta$  et une distance  $D$  à l'apex (voir figure 5.5).

#### ***Hyperstatisme de translation en x***

Pour remédier à l'hyperstatisme de translation suivant  $x$ , il faut poser une cote tolérancée ( $T_1$ ) entre le sommet du cône propre à l'engrenage (25) et la référence B du groupe boîtier [0]. À noter que cette cote tolérancée contrôle, dans une certaine mesure, les hyperstatismes de moment autour des axes  $y$  et  $z$ .

#### ***Hyperstatismes de translation en y et z***

Pour contrôler les défauts géométriques de position correspondant aux hyperstatismes de translation suivant  $y$  et  $z$ , l'axe de l'engrenage conique (25) est positionné théoriquement par rapport à la référence A du groupe boîtier [0] (en relation avec l'arbre de sortie [3]), puis affecté d'une tolérance géométrique de position sur le diamètre ( $T_2$ ).

#### ***Hyperstatisme de moment autour des axes y et z***

Les hyperstatismes de moment autour des axes  $y$  et  $z$  obligent à imposer des tolérances de parallélisme ( $T_3$ ) et d'angularité ( $T_4$ ). Ces contrôles permettent de rendre négligeable respectivement les composantes hyperstatiques de moment autour des axes  $y$  et  $z$ .

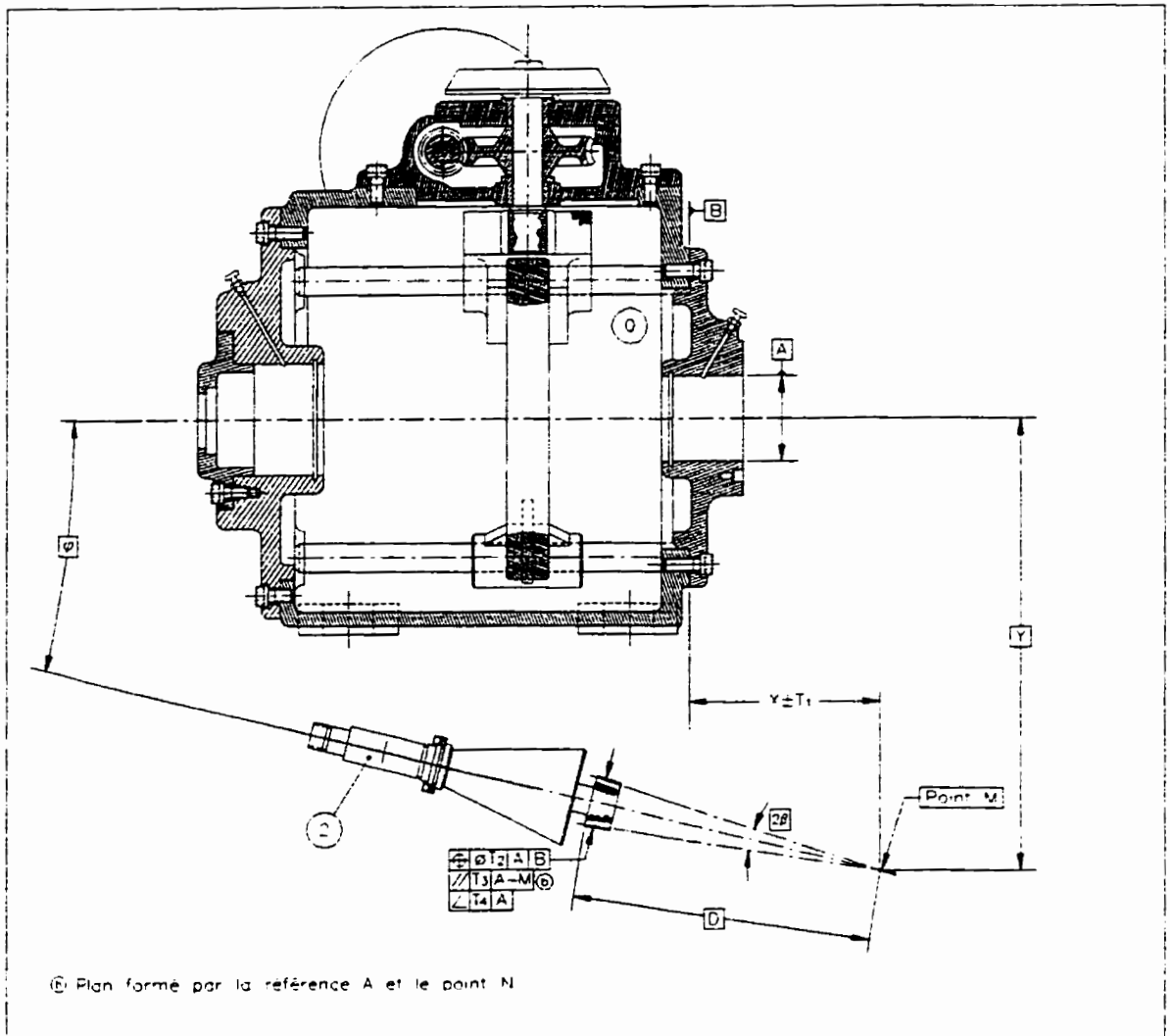


Figure 5.5: Conditions fonctionnelles relatives au groupe arbre de sortie [3]

### 3.1.3) Conditions fonctionnelles relatives au groupe cône de transmission [2]

Le groupe cône de transmission [2] est en relation avec trois sous-ensembles, soit l'arbre d'entrée [1], le boîtier [0] et l'arbre de sortie [3]. De façon à maîtriser les hyperstatismes de translation et de moment, en rapport avec ce groupe, certaines conditions fonctionnelles, entre le groupe boîtier [0] et le groupe arbre d'entrée [1], et entre les groupes arbre de sortie [3] et arbre d'entrée [1], doivent être posées. Pour savoir quels hyperstatismes sont engendrés par les groupes [0] et [1], et quels autres par [1] et [3], il faut examiner les équations d'équilibre du groupe cône de transmission [2]

(équation 5.36, page 112). Les conditions fonctionnelles résultantes sont illustrées aux figures 5.6 et 5.7 respectivement. À noter que le boîtier [0] et l'arbre de sortie [3] se trouvent automatiquement positionnés correctement l'un par rapport à l'autre. De même, le fait de considérer les groupes [0]-[1] et [1]-[3], plutôt que [0]-[3] et [1]-[3] est tout à fait arbitraire.

### ***3.1.3.1) Conditions fonctionnelles entre le groupe boîtier [0] et le groupe arbre d'entrée [1], relatives au groupe cône de transmission [2]***

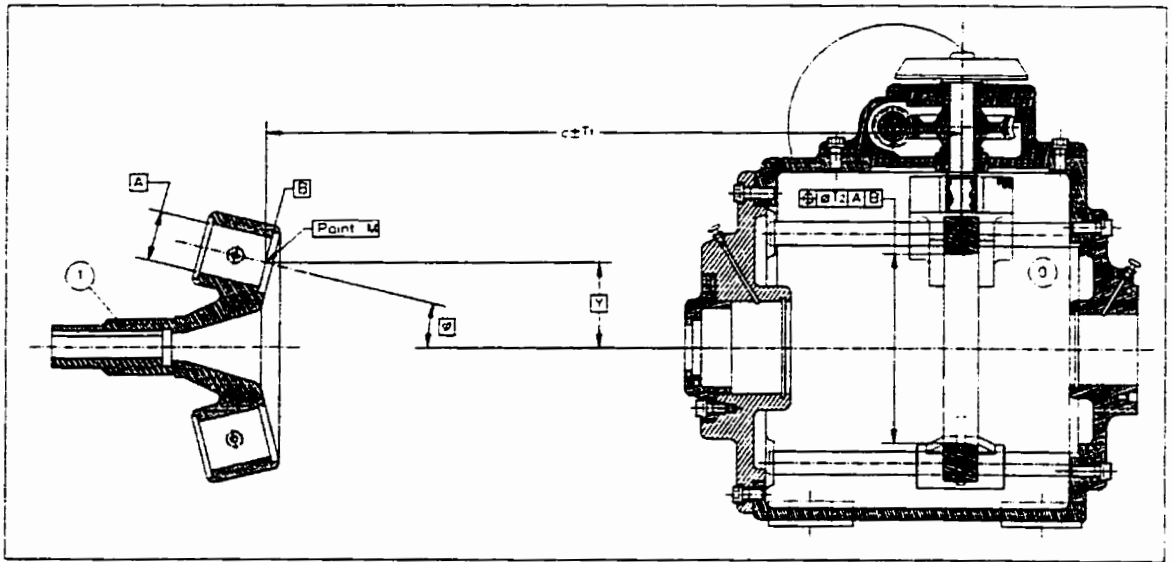
L'étude des équations d'équilibre du groupe cône de transmission montre que les hyperstatismes de translation sont engendrés par les trois groupes. Cependant, les hyperstatismes de moment autour des axes y et z sont la conséquence des groupes [1] et [3]. En effet, il est possible de constater que, relativement au groupe [0], seuls des termes induits sont présents dans les équations de moments autour des axes y et z (équation 5.36, page 112). Ainsi, les conditions fonctionnelles à poser entre les groupes [0] et [1] concernent exclusivement les hyperstatismes de translation suivant x, y et z.

#### ***Hyperstatisme de translation en x***

Pour remédier à l'hyperstatisme de translation suivant x, il faut poser une cote tolérancée ( $T_1$ ) entre le point M du groupe arbre d'entrée [1], et l'endroit du contact de l'anneau de contrôle appartenant au groupe boîtier [0] avec le cône de transmission [2].

#### ***Hyperstatismes de translation en y et z***

Pour contrôler les défauts géométriques de position correspondant aux hyperstatismes de translation suivant y et z, l'axe de l'anneau de contrôle est positionné théoriquement par rapport au point M du groupe arbre d'entrée [1], puis affecté d'une tolérance géométrique de position sur le diamètre ( $T_2$ ).



**Figures 5.6:** Conditions fonctionnelles entre l'arbre d'entrée [1] et le boîtier [0], relatives au groupe cône de transmission [2]

### **3.1.3.2) Conditions fonctionnelles entre le groupe arbre d'entrée [1] et le groupe arbre de sortie [3], relatives au groupe cône de transmission [2]**

La liaison du groupe arbre de sortie [3] au groupe cône de transmission [2] est réalisée par l'intermédiaire de la couronne d'engrenage (23). Aussi, le contrôle des hyperstatismes de translation et de moment passe par le contrôle de l'ouverture du cône propre à cette couronne d'engrenage (23). Les caractéristiques de celle-ci sont un angle d'ouverture de  $2\gamma$  et une distance  $L$  à l'apex (voir figure 5.7).

#### ***Hyperstatisme de translation en x***

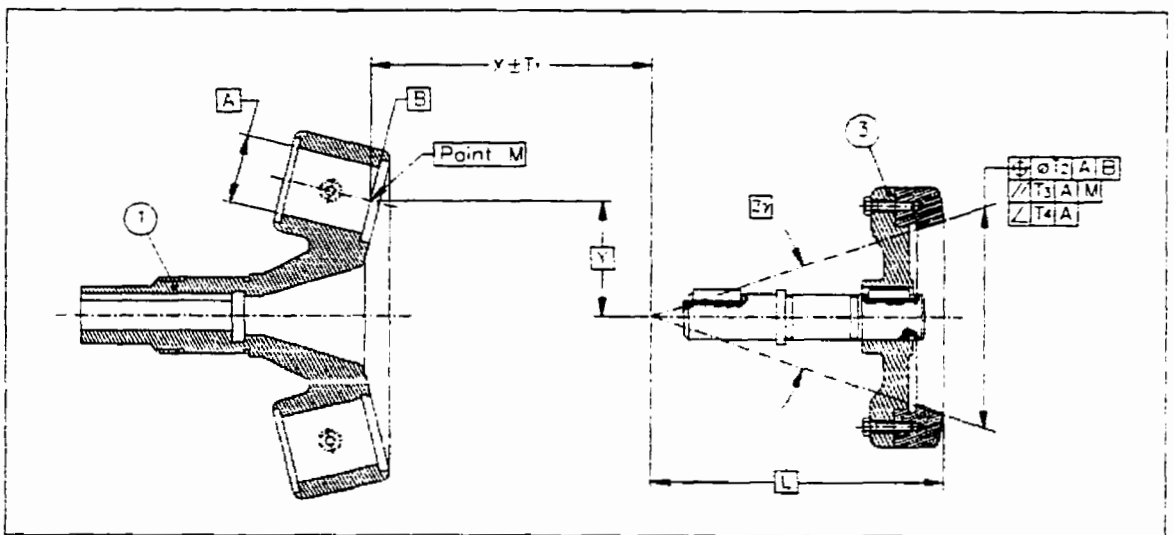
Pour remédier à l'hyperstatisme de translation suivant  $x$ , il faut poser une cote tolérancée ( $T_1$ ) entre le sommet du cône propre à la couronne d'engrenage (23) et le point M du groupe arbre d'entrée [1].

### *Hyperstatismes de translation en y et z*

Pour contrôler les défauts géométriques de position correspondant aux hyperstatismes de translation suivant y et z, l'axe de la couronne d'engrenage (23) est positionné théoriquement par rapport au point M du groupe arbre d'entrée [1], puis affecté d'une tolérance géométrique de position sur le diamètre ( $T_2$ ).

### *Hyperstatisme de moment autour des axes y et z*

Les hyperstatismes de moment autour des axes y et z obligent à imposer des tolérances de parallélisme ( $T_3$ ) et d'angularité ( $T_4$ ). Ces contrôles permettent de rendre négligeable respectivement les composantes hyperstatiques de moment autour des axes y et z.

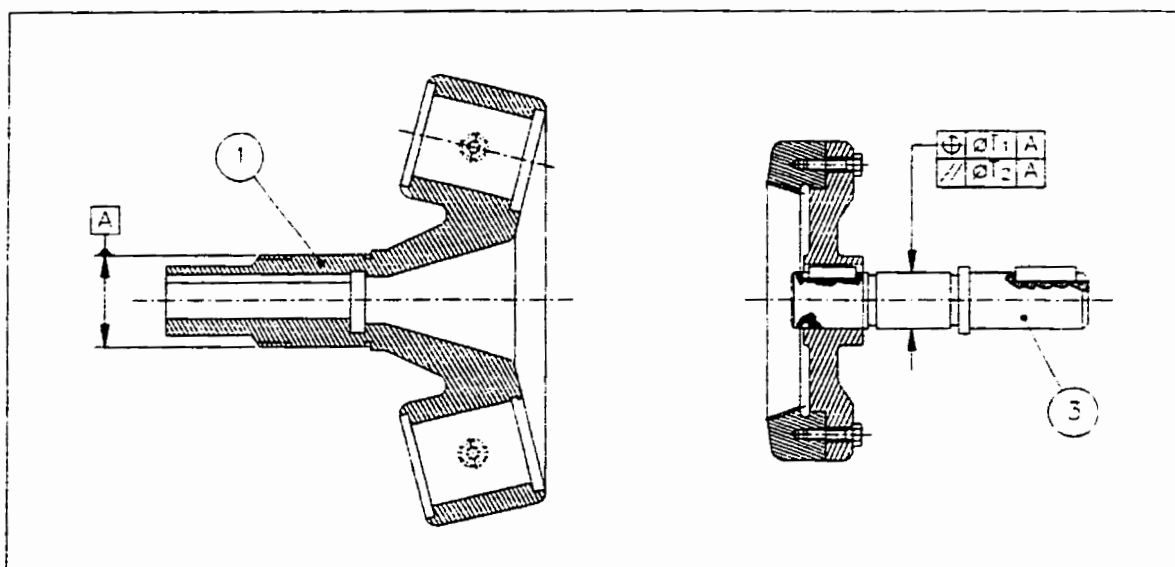


**Figure 5.7:** Conditions fonctionnelles entre l'arbre d'entrée [1] et l'arbre de sortie [3] relatives au groupe cône de transmission [2]

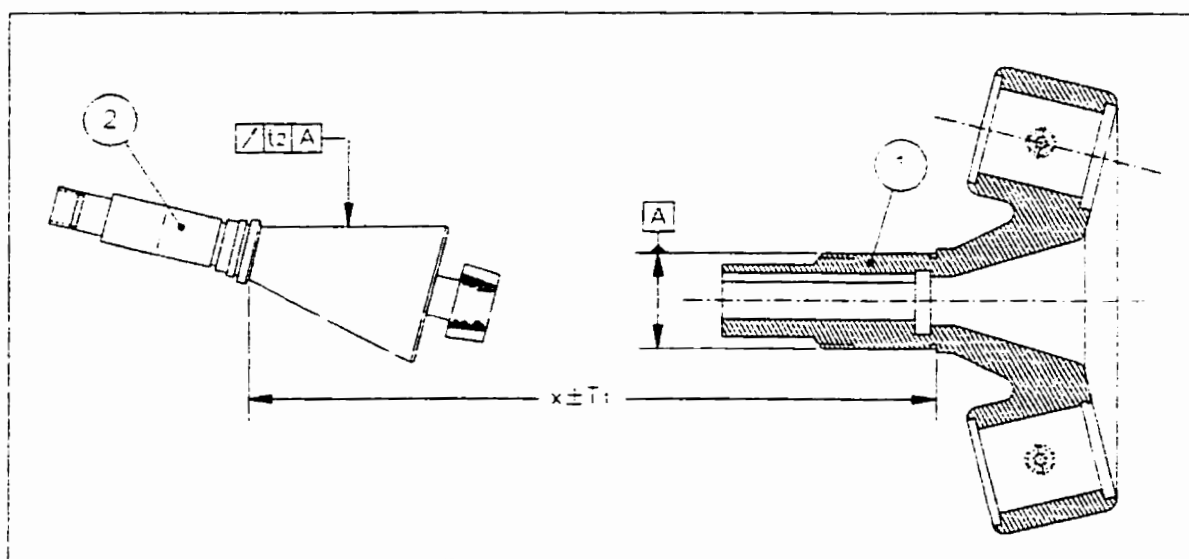
#### **3.1.4) Conditions fonctionnelles relatives au boîtier [0]**

La fermeture de chaîne sur le boîtier [0] requiert des conditions fonctionnelles entre l'arbre d'entrée [1] et l'arbre de sortie [3], et entre l'arbre d'entrée [1] et le cône de transmission [2]. Ces conditions fonctionnelles sont illustrées aux figures 5.8 et 5.9.





**Figures 5.8:** Conditions fonctionnelles entre l'arbre d'entrée [1] et l'arbre de sortie [3], relatives au groupe boîtier [0]



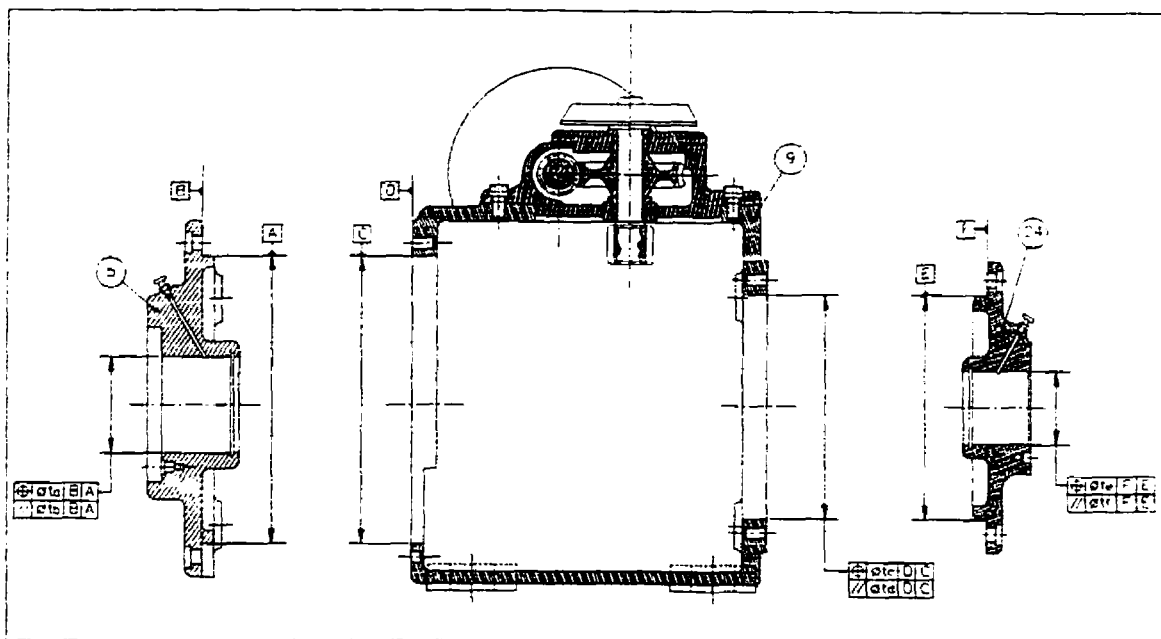
**Figures 5.9:** Conditions fonctionnelles entre l'arbre d'entrée [1] et le cône de transmission [2], relatives au groupe boîtier [0]

### 3.2) Proposition du tolérancement géométrique, pour chacune des pièces du système mécanique

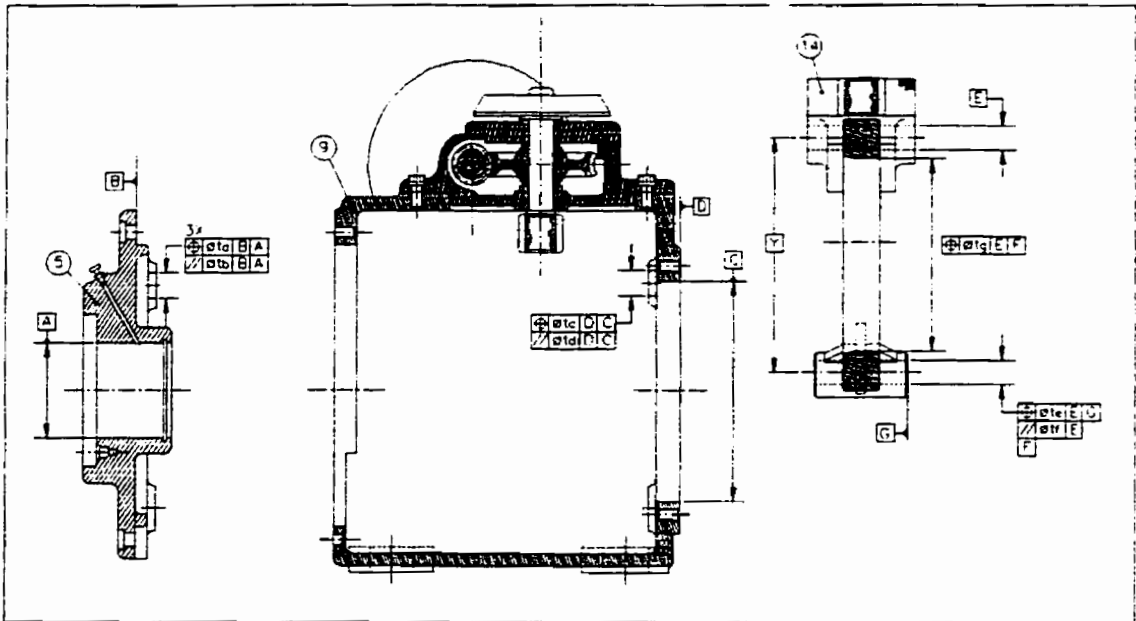
Les conditions fonctionnelles relatives à chacun des groupes se propagent à travers les pièces constituant le groupe en question, au moyen des flux fonctionnels. Dans ce qui suit, un tolérancement géométrique possible, pour chacun des groupes, est donné.

#### 3.2.1) Tolérancement des pièces appartenant au groupe boîtier [0]

Dans le cas du groupe boîtier [0], il est possible de découpler le tolérancement géométrique à poser sur les pièces, selon que les conditions fonctionnelles concernent les groupes [1] et [3] ou [1] et [2]. Le tolérancement impliqué dans chacun des cas est donné aux figures 5.10 et 5.11 respectivement.



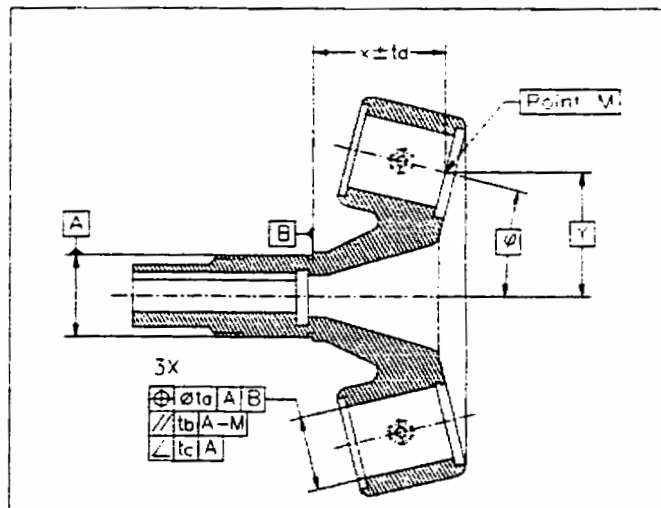
Figures 5.10: Tolérancement des pièces du groupe boîtier [0], en relation avec les conditions fonctionnelles impliquant les groupes [1] et [3]



**Figures 5.11:** Tolérancement des pièces du groupe boîtier [0], en relation avec les conditions fonctionnelles impliquant les groupes [1] et [2]

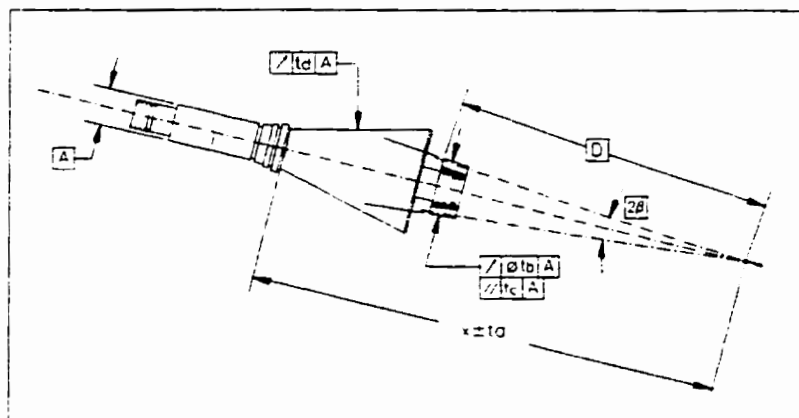
### 3.2.2) Tolérancement de l'arbre d'entrée [1]

La figure 5.12 illustre le tolérancement géométrique pour l'arbre d'entrée.



**Figure 5.12:** Tolérancement de l'arbre d'entrée

### 3.2.3) Tolérancement du cône de transmission [2]



Figures 5.13: Tolérancement du cône de transmission [2]

### 3.2.4) Tolérancement des pièces appartenant au groupe arbre de sortie [3]

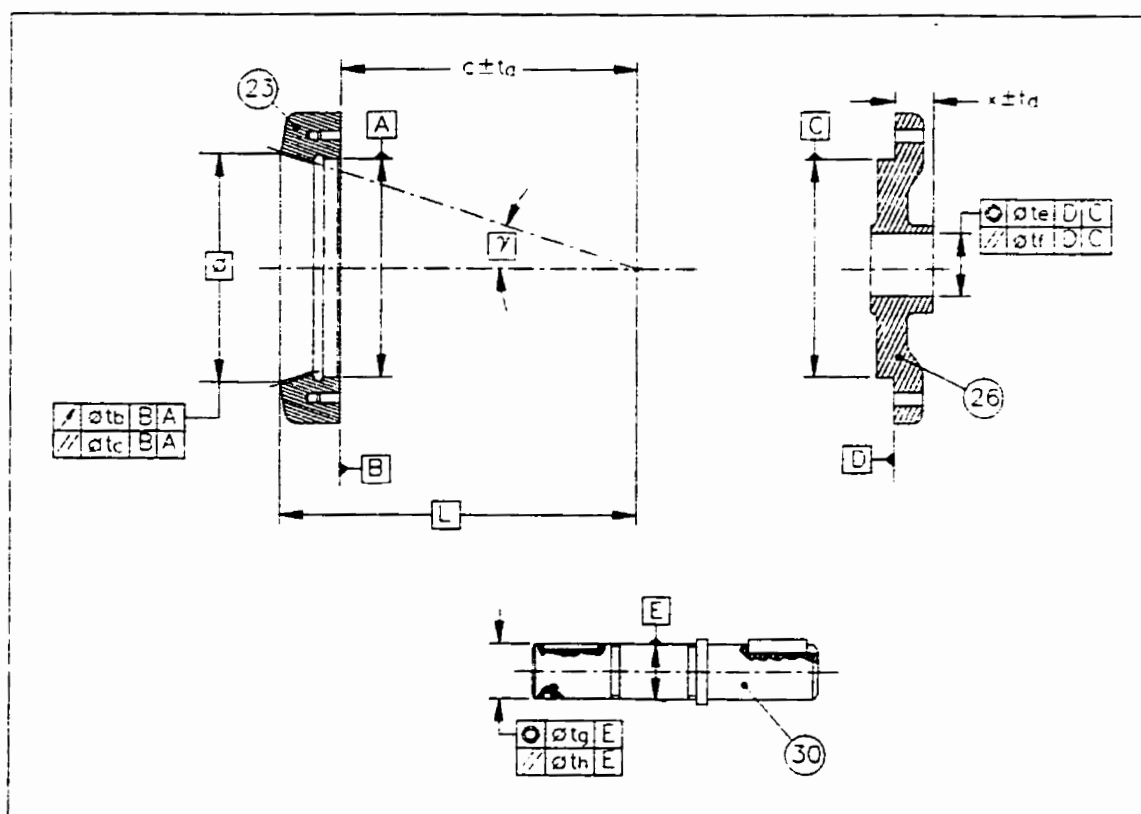


Figure 5.14: Tolérancement des pièces appartenant au groupe arbre de sortie [3]

## CONCLUSION

L'objectif du présent travail, le développement d'une méthodologie de spécification du tolérancement géométrique, associé à la nature cinématique d'un système mécanique, a été réalisé puis appliqué sur un certain nombre d'exemples. La démarche proposée a pour avantage d'utiliser des concepts de la théorie des mécanismes déjà bien documentés. Seule la modélisation des liaisons par les torseurs, support mathématique pour l'analyse hyperstatique, est peu commune sur le continent nord-américain.

### 6.1 Conclusions relatives à l'application de la méthode

L'étude des trois mécanismes suivants, soit le moteur à explosion deux temps, la pompe à corps déformable et le variateur de vitesses, a permis de corroborer certaines notions fondamentales relativement à la méthodologie développée. Ainsi, de par la simplicité des équations résultant de l'analyse hyperstatique du micromoteur, il peut être vérifié sans peine que le choix de la ou des forces extérieures agissant sur le système qui sont connues, préférablement aux autres, est sans conséquence. Bien sûr, encore faut-il que ces efforts extérieurs soient découplés, deux variables dépendantes (par exemple, la force de pression  $F_p$  et le couple de sortie  $C$ ) ne pouvant être imposées en même temps sans risquer qu'il y ait incohérence dans le système. Cette constatation est en parfait accord avec la réalité puisque, outre le fait qu'une force extérieure soit connue ou non, le mécanisme est foncièrement le même. Par conséquent, l'obtention d'un résultat autre est un indice qu'une erreur s'est glissée dans le développement des équations, ou encore que le modèle de départ est incorrect.

De même, l'étude de la pompe péristaltique, aussi bien que celle de la transmission, ont démontré qu'il faut être circonspect sur la façon de prendre en compte les termes de moments induits par les efforts transmissibles, selon ce qui est recherché. Effectivement,

lorsqu'il s'agit de déterminer les inconnues statiques, ces termes revêtent une importance considérable puisqu'ils propagent de l'information entre les équations. Leur absence fausse complètement l'analyse statique. Cependant, lorsque vient le temps d'évaluer l'influence des sources d'hyperstatisme sur les divers composants du système mécanique, les termes induits ne doivent plus être pris en considération. La raison étant que ces termes induits ne représentent pas un blocage tangible d'un degré de liberté, causé par une liaison entre deux composants, mais sont plutôt la simple conséquence de l'application du théorème des moments.

## **6.2 Limites et contraintes de la méthode développée**

Bien que la méthode proposée marque un pas en avant dans le domaine, en s'inscrivant comme l'une des premières démarches logiques et rationnelles permettant le tolérancement géométrique d'un système mécanique, il n'en demeure pas moins qu'elle présente, encore à ce jour, certaines limites. Tout d'abord, la première étape de la méthode, la modélisation du mécanisme, est décisive en ce qui a trait aux résultats qui seront obtenus. Une compréhension approfondie du fonctionnement du système étudié, de même qu'une connaissance des caractéristiques techniques des composants technologiques impliqués, sont indispensables à la formulation des hypothèses de départ, soit ici l'association d'un modèle de liaison cinématique à chacune des liaisons mécaniques présentes dans le mécanisme. L'expérience de l'ingénieur concepteur est donc incontestablement mise à contribution.

Par ailleurs, la méthodologie développée permet essentiellement d'être informé des contrôles de position et d'orientation requis pour chacune des pièces du système mécanique. Néanmoins, le problème du tolérancement géométrique proprement dit demeure entier. En ce sens, ce sont les contraintes relatives à la fabrication et à l'inspection des pièces qui dicteront principalement le tolérancement géométrique à

adopter parmi les diverses possibilités offertes par la norme. Le débutant sera donc amené à faire preuve de vigilance lors de cette dernière étape de la démarche, soit la spécification du tolérancement géométrique.

### **6.3 Perspectives d'avenir**

Toujours dans l'optique d'une intégration de toutes les étapes du cycle de production, il devient impératif d'informatiser la méthodologie développée. L'étape centrale de la méthodologie, soit l'analyse hyperstatique, ne devrait pas poser de problème puisqu'il s'agit essentiellement de mathématique pure et dure. Concernant les parties requérant une plus grande implication de la part de l'ingénieur, il serait intéressant d'évaluer dans quelle mesure la logique floue pourrait être utilisée comme axiome de base à un outil d'aide relativement aux choix des modèles à poser.

## RÉFÉRENCES

AGATI, P., BREMONT, Y., DELVILLE, G. (1988). Mécanique du solide - Applications industrielles, Dunod, Paris.

ANSI Standard Y14.5M-1994: "Dimensionning and Tolerancing", ASME, New York, 1994.

AUBLIN, M., BONCOMPAIN, R., BOULATON, M., CARON, D., JEAY, E., LACAGE, B., RÉA, J. (1992). Système mécanique théorie et dimensionnement, Dunod, Paris, 662 p.

BAZERGUI, A., BUI-QUOC, T., BIRON, A., McINTYRE, G., LABERGE, C. (1987). Résistance des matériaux, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, Montréal, 477p.

BERGE, C. (1970). Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris, 502 p.

BLOUTIN, G., DAVESNE D., GIARD, J., LALIBERTÉ, C., LAVOIE, P (1982). Algèbre linéaire et géométrie, Gaëtan Morin éditeur ltée, Québec, 366 p.

BRICARD, R. (1927). Leçons de cinématique, Gauthier-Villars, Paris.

CHEVALIER, A. (1988). Guide du dessinateur industriel, Hachette Technique, Paris, 320 p.

CLÉMENT, A., RIVIÈRE, A., TEMMERMAN, M. (1994). Cotation tridimensionnelle des systèmes mécaniques - théorie et pratique, PYC Édition, Paris, 316 p.



CLOS, C. (1993). Technologie des moteurs à combustion interne, Éditions Techniques pour l'Automobile et l'Industrie (E.T.A.I.), Paris, 165 p.

DUPINET, E. (1991). Contribution à l'étude d'un système informatique d'aide à la conception de produits mécaniques par la prise en compte des relations fonctionnelles. Thèse de doctorat, École Centrale de Paris, France.

GAUTHIER, D., CEDRA, C., BAZIN, M., DIDIER, L. (1989). Les moteurs à essence - technologie et fonctionnement des moteurs à allumage commandé, CEntre national du Machinisme Agricole du Génie Rural des Eaux et des Forêts (CEMAGREF), Paris, 168 p.

GIESECKE, F. E., MITCHELL, A., SPENCER, H. C., HILL, I.L., DYGDON, J.T. (1982). Dessin technique, Édition du Renouveau Pédagogique Inc., Ottawa, 774 p.

HERVÉ, J.M. (1976). La géométrie des groupes de déplacements appliquée à l'analyse cinématique des mécanismes. Thèse d'État, Paris, France.

KOENIGS, G. (1905). Introduction à une nouvelle théorie des mécanisme, Gauthier-Villars, Paris.

KREYSZIG, E. (1988). Matrices and determinants. Advanced engineering mathematics, 6<sup>e</sup> éd., John Wiley et sons Inc., 349-414.

LE BORZEC, R., LOTTERIE, J. (1975). Principes de la théorie des mécanismes, Dunod, Paris, 191 p.

LEROY, A. (1998). Dualité entre étude cinématique et étude statique d'un mécanisme parfait. Mécanique Matériaux Électricité, 428, 44-47.

RIVEST, L. (1993). Modélisation et analyse tridimensionnelles des tolérances dimensionnelles et géométriques. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

SPENDLÉ, D., GOURANT, R. (1993). Guide du calcul en mécanique, Hachette Technique, Paris, 256 p.

VOINEA, ARTANASIU, (1962). Théorie géométrique des vis et quelques applications à la théorie des mécanismes. Revue de mécanique appliquée, 7, 845-860.

## ANNEXE I: FONCTIONS DE SINGULARITÉS

« Les fonctions de singularités permettent d'exprimer analytiquement une discontinuité. Dans le cas des poutres, cette discontinuité est spatiale, c'est-à-dire qu'elle se produit à une certaine distance  $a$  - selon la longueur de la poutre - généralement associée à l'axe des  $x$ . On définit comme suit la fonction de singularité d'ordre  $n$ :

$$f_n(x) \equiv \langle x - a \rangle^n$$

Dans cette définition, on utilise les crochets  $\langle \rangle$  au lieu des parenthèses, pour bien distinguer la fonction de singularités d'une fonction ordinaire. Les propriétés de la fonction de singularités sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Si } n < 0, \quad & f_n(x) = \infty, \text{ lorsque } x = a \\ & f_n(x) = 0, \text{ lorsque } x \neq a \\ \text{Si } n \geq 0, \quad & f_n(x) = (x - a)^n, \text{ lorsque } x \geq a \\ & f_n(x) = 0, \text{ lorsque } x < a \end{aligned}$$

On remarque que pour  $n \geq 0$ , la fonction existe et devient équivalente à une fonction ordinaire, lorsque  $x \geq a$ » (Bazergui et al, 1987).

### Fonctions de singularités concernant l'exemple 1.2

#### • *Chargement:*

$$q(x) = (Ra)y\langle x \rangle_{-1} - 16 \text{ kN}\langle x - 1 \rangle_{-1} + (Rb)y\langle x - 2 \rangle_{-1} + (Rc)y\langle x - 4 \rangle_{-1}$$

#### •• *Effort tranchant:*

$$V(x) = \int -q(x)dx = -(Ra)y\langle x \rangle^0 + 16 \text{ kN}\langle x - 1 \rangle^0 - (Rb)y\langle x - 2 \rangle^0 - (Rc)y\langle x - 4 \rangle^0 + C'$$

La constante d'intégration  $C'$  est nulle, puisque aucun effort tranchant n'agit lorsque  $x < 0$ , valeur pour laquelle toutes les expressions de singularités sont nulles dans l'équation de  $V$ .

• **Moment fléchissant:**

$$M(x) = \int -V(x)dx = (Ra)y\langle x \rangle^1 - 16 \text{ kN}\langle x - 1 \rangle^1 + (Rb)y\langle x - 2 \rangle^1 + (Rc)y\langle x - 4 \rangle^1 + C''$$

Ici encore, la constante d'intégration  $C''$  est nulle, puisque aucun moment fléchissant n'agit lorsque  $x < 0$ .

• **Pente:**

$$EI\varphi(x) = \int M(x)dx = \frac{(Ra)y}{2}\langle x \rangle^2 - \frac{16 \text{ kN}}{2}\langle x - 1 \rangle^2 + \frac{(Rb)y}{2}\langle x - 2 \rangle^2 + \frac{(Rc)y}{2}\langle x - 4 \rangle^2 + C_1$$

• **Flèche:**

$$EIv(x) = \int EI\varphi(x)dx = \frac{(Ra)y}{6}\langle x \rangle^3 - \frac{16 \text{ kN}}{6}\langle x - 1 \rangle^3 + \frac{(Rb)y}{6}\langle x - 2 \rangle^3 + \frac{(Rc)y}{6}\langle x - 4 \rangle^3 + C_1x + C_2$$

## ANNEXE II: TOLÉRANCEMENT D'UN SATT

Tableau I: Les 7 classes de surfaces élémentaires.


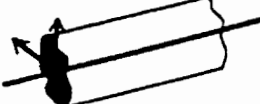
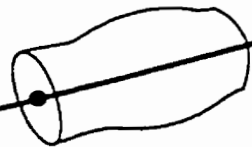



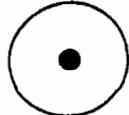














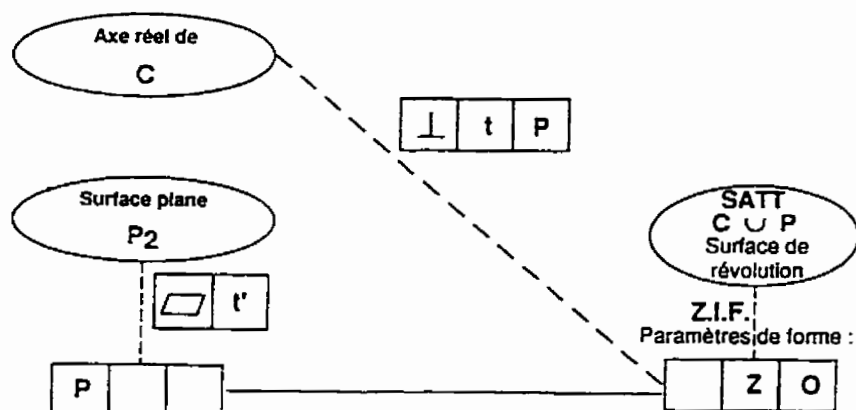
	Dimension	Sous-groupe de $\{D\}$ correspondant.	E.G.R.M.
	0	$\{E\}$ Déplacement identité	Tout plan de $E3$ Toute droite de $E3$ Tout point de $E3$
	1	$\{T_D\}$ Translation unidirectionnelle	Tout plan parallèle à D Toute droite parallèle à D
	1	$\{R_D\}$ Rotation autour d'une droite pointée.	Toute droite parallèle à D. Tout point de D
	1	$\{H_{D,D}\}$ Vissage	Toute droite parallèle à D
	2	$\{C_D\}$ Mouvement de pivot glissant.	Toute droite parallèle à D
	3	$\{G_P\}$ Mouvement plan	Tout plan parallèle à P
	3	$\{S_O\}$ Mouvement sphérique.	Point O centre de la sphère.

Tableau IV : Cas d'intersection de sous-groupe de  $\{D\}$ 

	0	1	2	3	4	5	6	7
	LOI DE COMPOSITION INTERNE COMMUTATIVE	SAT invariant sous la transformation identité 	SAT invariant sous la translation spécifique 	SAT invariant sous la rotation spécifique 	SAT invariant sous le déplacement hélicoïdal 	SAT invariant sous rotation cylindriques 	SAT invariant sous le déplacement plan 	SAT invariant sous le déplacement sphérique 
1		(E)	(E)	(E)	(E)	(E)	(E)	(E)
2			$D_1 // D_2 \rightarrow \{To1\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$	(E)	(E)	$D_1 // D_2 \rightarrow \{To1\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$	$D_2 // P_1 \rightarrow \{To2\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$	(E)
3				$D_1 = D_2 \rightarrow \{Ro1\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$	(E)	$D_1 = D_2 \rightarrow \{Ro1\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$	$D_2 \perp P_1 \rightarrow \{Ro2\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$	$O_1 \in D_2 \rightarrow \{Ro2\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$
4					$D_1 - D_2 - p1 - p2 \rightarrow \{Ho1, p1\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$	$D_1 = D_2 \rightarrow \{Ho1, p1\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$	(E)	(E)
5						$D_1 = D_2 \rightarrow \{Co1\}$ $O_1 // D_2 \wedge O_1 \wedge D_2 \rightarrow \{To1\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$	$D_2 \perp P_1 \rightarrow \{Ro2\}$ $D_2 // P_1 \rightarrow \{To2\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$	$O_1 \in D_2 \rightarrow \{Ro2\}$ sinon $\rightarrow \{E\}$
6							$P_1 // P_2 \rightarrow \{Gp1\}$ sinon $\rightarrow \{Tp\}$	(Ro)
7								$O_1 = O_2 \rightarrow \{Ro\}$ sinon $\rightarrow \{So1\}$

## CAS 5-6/B'

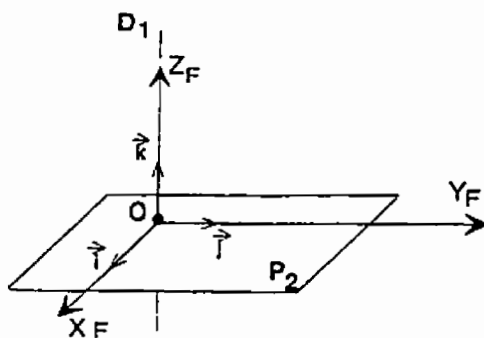
### MODELE CONCEPTUEL DU SATT RESULTANT



NB : Z indique la droite perpendiculaire au plan P qui minimise t. (On détermine 2 translations)

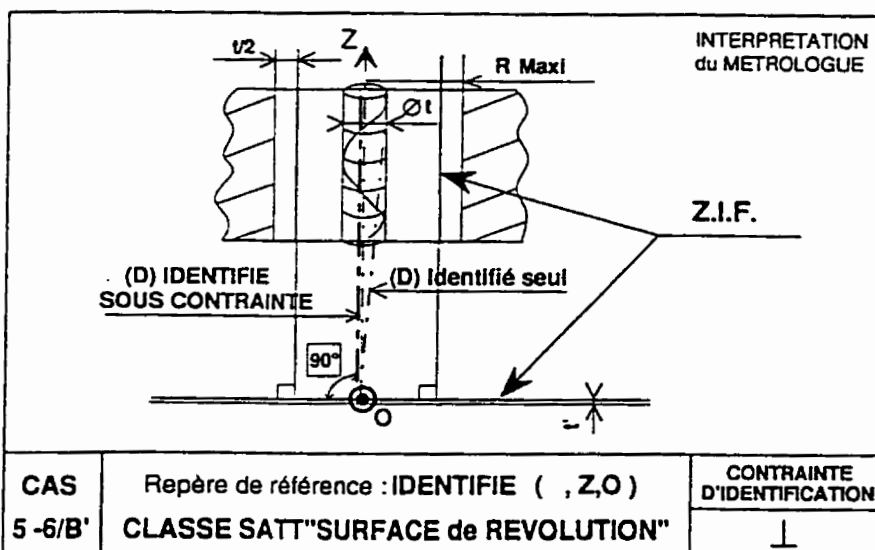
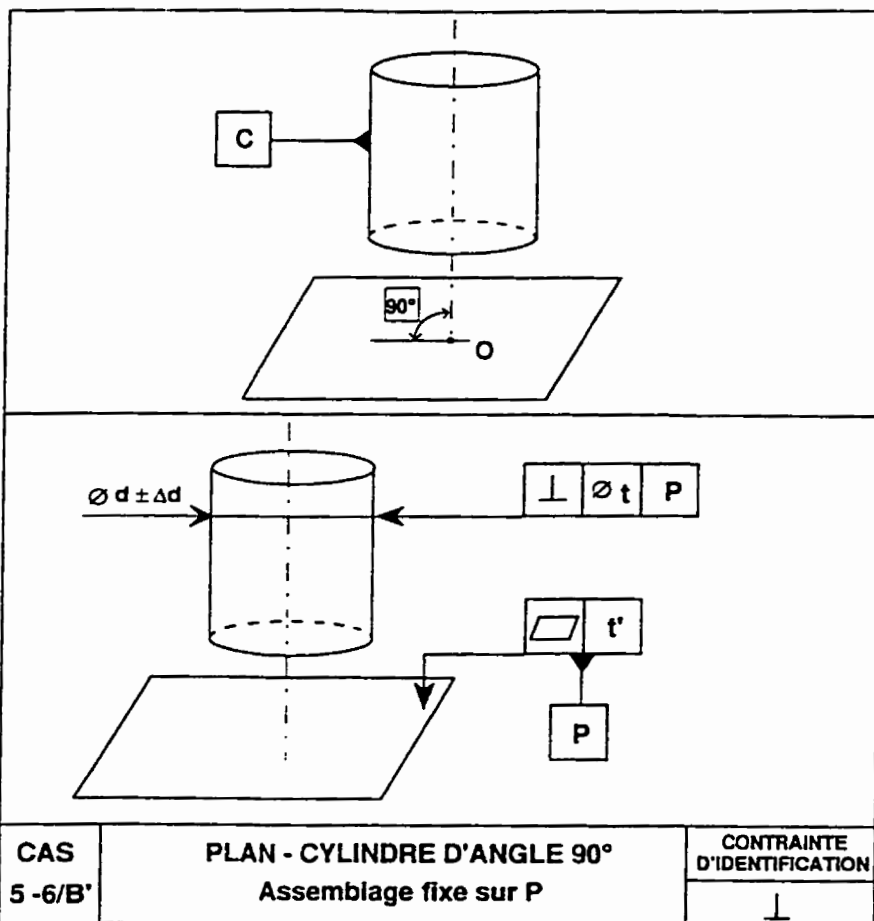
Éléments tolérancés : Les centres des sections droites.

### INTERPRETATION VECTORIELLE



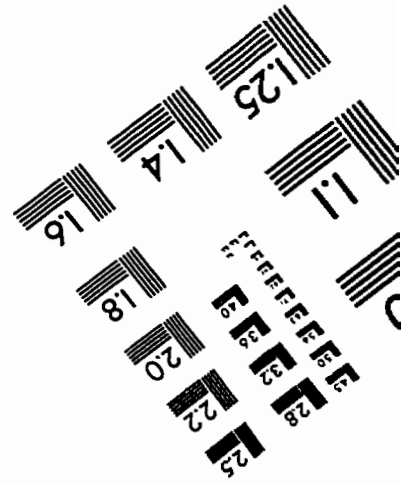
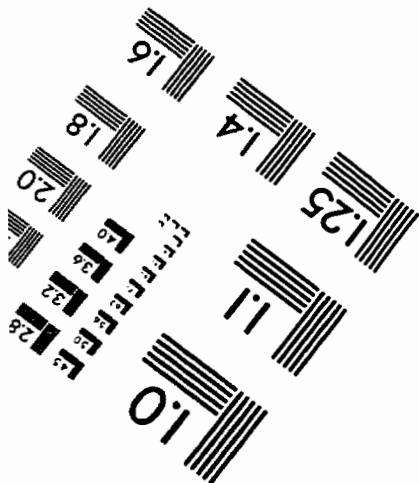
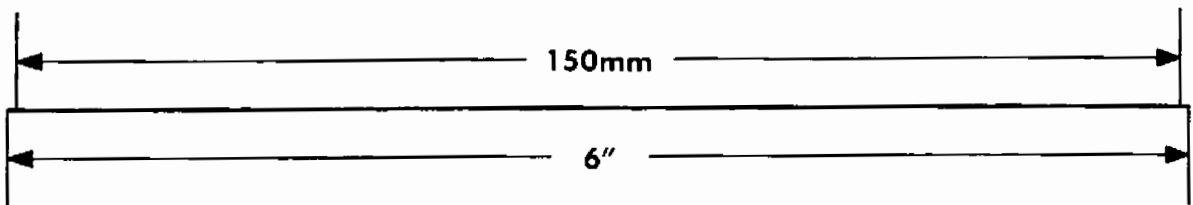
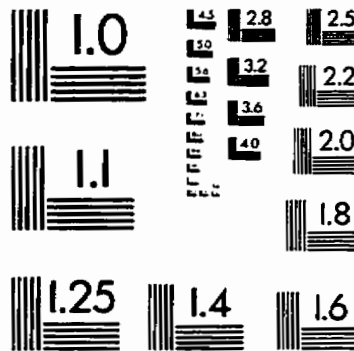
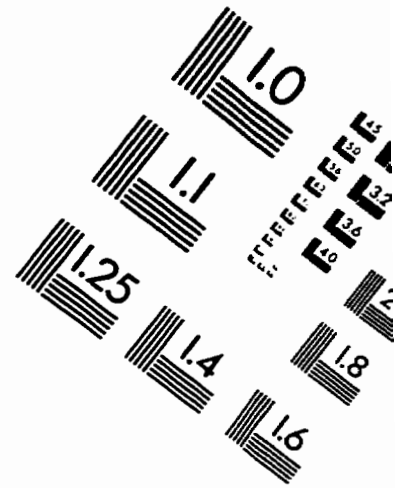
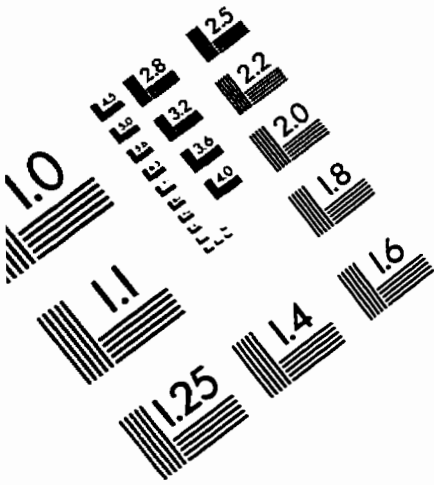
Pour le point O et, en projection sur un trièdre orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on a :

$$\text{et } \begin{aligned} \vec{\Omega}_{2/1} &= \Delta\alpha\vec{i} + \Delta\beta\vec{j} \\ \vec{D}_{O2/1} &= \vec{0} \end{aligned}$$





# IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc  
1653 East Main Street  
Rochester, NY 14609 USA  
Phone: 716/482-0300  
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved